3 次元固有値問題 (2)

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V05 2020 年 10 月 12,13 日 at HC for 経済数学入門，経済数学
V06 2021 年 12 月 01 日 at HC for LA

具体例 (1)—固有方程式が重根をもつ場合

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

の固有値と固有ベクトルを求めます.

具体例 (2)—固有方程式

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3\\ 1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

から A の固有値は $\lambda=1,3$(重根) であることが分かります.

具体例 (3)—固有ベクトル

(i) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$行列式の計算における行基本変形を用いると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#1)$$

であることが分かりますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = 2z,\ \ y = -z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります．

具体例 (3)—固有ベクトル

(ii) $\underline{\lambda = 3 \text{ のとき}}$ 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \color{red}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y - z = 0 \qquad (\#2)$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

であることが分かります．

部分空間とその直和 (1)

$V, W \subset \mathbf{K}^n$ が部分空間とします．このとき

$$V + W := \{\vec{v} + \vec{w} \in \mathbf{K}^n;\ \vec{v} \in V,\ \vec{w} \in W\}$$

も部分空間となります．
部分空間の和 $V + W$ が**直和**であるとは

$$\vec{v} \in V, \vec{w} \in W, \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w} = \vec{0}$$

が成立するときで $V \oplus W$ と記します．

部分空間とその直和 (2)

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して

$$V(\alpha) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n;\ A\vec{v} = \alpha\vec{v}\}$$

と定めます.

Theorem

$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が $\alpha \neq \beta$ を満たすならば

$$V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

部分空間とその直和 (3)

$\vec{v}_1 \in V(\alpha)$, $\vec{v}_2 \in V(\beta)$ が

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0} \tag{2}$$

を満たすとします．この両辺に $(A - \beta I_n)$ を掛けると

$$(\alpha - \beta)\vec{v}_1 = \vec{0} \quad 従って \quad \vec{v}_1 = \vec{0}$$

となります．これを (2) に代入して $\vec{v}_2 = \vec{0}$ も従います．

具体例 (4)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

と定めます．一般論によって

$$V(1) \oplus V({\color{red}3})$$

が成立しますから，$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ とすると

$$c_1\vec{p}_1 = \vec{0},\ c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

となります．$\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ であることが分かります．

$$c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_2 = c_3 = 0$ が従います．よって P は正則となります．

具体例 (5)—対角化

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (1\cdot\vec{p}_1\ 3\cdot\vec{p}_2\ 3\cdot\vec{p}_3)$$
$$= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

と A が対角化されます.

固有空間 (1)

- $A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell \in \mathbf{K}$

$$V(\alpha_i) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n;\ A\vec{v} = \alpha\vec{v}\}$$

- **定理** $\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j)$

$$\vec{v}_i \in V(\alpha_i) \quad (i = 1, \cdots, \ell)$$

$$\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

ならば

$$\vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

- 証明は ℓ の帰納法を用いる。

固有空間 (2)

前ページの定理を $\ell = 3$ の場合に示します.

Theorem

$A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta \gamma \in \mathbf{K}$ が

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

を満たすとします．このとき

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma),\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

ならば $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{0}$ が従います.

固有空間 (3)

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \tag{3}$$

の両辺に $(A - \gamma I_n)$ を掛けると

$$(\alpha - \gamma)\vec{v}_1 + (\beta - \gamma)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

となります．これから

$$(\alpha - \gamma)\vec{v}_1 = (\beta - \gamma)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

さらに

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$

となります．これを (3) に代入すると $\vec{v}_3 = \vec{0}$ も従います．

部分空間の和と直和

- $V_i \subset \mathbf{K}^n$ が部分空間とする $(i = 1, \cdots, \ell)$。このとき
$$V_1 + \cdots + V_\ell := \{\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell;\ \vec{v}_i \in V_i \quad (i = 1, \cdots, \ell)\}$$
は $\mathbf{K}^n$ の部分空間である。
- $$\vec{v}_i \in V_i (i = 1, \cdots, \ell), \quad \vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_\ell = \vec{0}$$
が成立するとき、$V_1 + \cdots + V_\ell$ は**直和**といい
$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$$
と記す。

固有空間分解 (0)—準備

$A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha \in \mathbf{K}$ とします.

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)g(\lambda),\ \ g(\alpha) \neq 0$$

ならば

$$\dim V(\alpha) = 1$$

固有空間分解 (1a)

$A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して、固有値 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が単純としよう。

$$\alpha \neq \beta, \ \beta \neq \gamma, \ \gamma \neq \alpha$$

このとき

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

固有空間分解 (1b)

$$V(\alpha) = \mathbf{K}\vec{p}_1, \quad V(\beta) = \mathbf{K}\vec{p}_2, \quad V(\gamma) = \mathbf{K}\vec{p}_3$$

とすると，任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{c} = P^{-1}\vec{v}$$

とすると

$$\vec{v} = PP^{-1}\vec{v} = P\vec{c} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 \in V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

となりますから

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

固有空間分解 (2)

$\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

とすると $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を $\vec{v}$ で表せるか。

固有空間分解 (3)

そのアイデア (1) $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$, $\vec{v} \in V(\alpha)$ に対して

$$f(A)\vec{v} = f(\alpha)\vec{v}$$

固有空間分解 (4)

そのアイデア (2)

$$\frac{(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=1$$

固有空間分解 (5)

$\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ が

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

とすると

$$\vec{v}_1 = \frac{(A-\beta)(A-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\vec{v}$$

固有空間分解 (6)

前回の講義の $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ は

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

を満たす.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(-1),\ \vec{v}_2 \in V(1),\ \vec{v}_3 \in V(2)$$

とすると

$$\vec{v}_1 = \frac{(A - I_3)(A - 2I_3)}{(-1-1)(-1-2)}\vec{v} = \frac{1}{6}(A - I_3)(A - 2I_3)\vec{v}$$

と表されます.