

3次元固有値問題 (2)

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

V05 2020年10月12,13日 at HC for 経済数学入門, 経済数学

具体例 (1)—固有方程式が重根をもつ場合

3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

の固有値と固有ベクトルを求めます.

具体例(2)—固有方程式

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 & \lambda - 3 \\ 1 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$ (重根) であることが分かります。

具体例(3)—固有ベクトル

(i) $\lambda = 1$ のとき行列式の計算における行基本変形を用いると

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\#1)$$

であることがわかりますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = 2z, y = -z$$

となります。これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることがわかります。

具体例(3)—固有ベクトル

(ii) $\lambda = 3$ のとき 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y - z = 0 \quad (\#2)$$

となります。これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

であることが分かります。

部分空間とその直和 (1)

$V, W \subset \mathbf{K}^n$ が部分空間とします。このとき

$$V + W := \{\vec{v} + \vec{w} \in \mathbf{K}^n; \vec{v} \in V, \vec{w} \in W\}$$

も部分空間となります。

部分空間の和 $V + W$ が**直和**であるとは

$$\vec{v} \in V, \vec{w} \in W, \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w} = \vec{0}$$

が成立するときで $V \oplus W$ と記します。

部分空間とその直和 (2)

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して

$$V(\alpha) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n; A\vec{v} = \alpha\vec{v}\}$$

と定めます.

Theorem

$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ が $\alpha \neq \beta$ を満たすならば

$$V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

部分空間とその直和 (3)

$\vec{v}_1 \in V(\alpha), \vec{v}_2 \in V(\beta)$ が

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

を満たすとします. この両辺に $(A - \beta I_n)$ を掛けると

$$(\alpha - \beta)\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \text{従って} \quad \vec{v}_1 = \vec{0}$$

となります. これを (2) に代入して $\vec{v}_2 = \vec{0}$ も従います.

具体例(4)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

と定めます. 一般論によって

$$V(1) \oplus V(3)$$

が成立しますから, $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ とすると

$$c_1\vec{p}_1 = \vec{0}, \quad c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

となります. $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ であることが分かります.

$$c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_2 = c_3 = 0$ が従います. よって P は正則となります.

具体例 (5)—対角化

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (1 \cdot \vec{p}_1 \ 3 \cdot \vec{p}_2 \ 3 \cdot \vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と A が対角化されます。

固有空間 (1)

- $A \in M_n(\mathbf{K}), \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbf{K}$

$$V(\alpha_i) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n; A\vec{v} = \alpha_i\vec{v}\}$$

- **定理** $\alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)$

$$\vec{v}_i \in V(\alpha_i) \quad (i = 1, \dots, \ell)$$

$$\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

ならば

$$\vec{v}_1 = \dots = \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

- 証明は ℓ の帰納法を用いる。

固有空間 (2)

前ページの定理を $l = 3$ の場合に示します。

Theorem

$A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が

$$\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$$

を満たすとします。このとき

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha), \vec{v}_2 \in V(\beta), \vec{v}_3 \in V(\gamma), \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

ならば $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{0}$ が従います。

固有空間 (3)

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \quad (3)$$

の両辺に $(A - \gamma I_n)$ を掛けると

$$(\alpha - \gamma)\vec{v}_1 + (\beta - \gamma)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

となります. これから

$$(\alpha - \gamma)\vec{v}_1 = (\beta - \gamma)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

さらに

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$

となります. これを (3) に代入すると $\vec{v}_3 = \vec{0}$ も従います.

部分空間の和と直和

- $V_i \subset \mathbf{K}^n$ が部分空間とする ($i = 1, \dots, \ell$)。このとき

$$V_1 + \dots + V_\ell := \{\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_\ell; \vec{v}_i \in V_i \quad (i = 1, \dots, \ell)\}$$

は \mathbf{K}^n の部分空間である。

-

$$\vec{v}_i \in V_i (i = 1, \dots, \ell), \quad \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_\ell = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \dots = \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

が成立するとき、 $V_1 + \dots + V_\ell$ は**直和**といい

$$V_1 \oplus \dots \oplus V_\ell$$

と記す。

固有空間分解 (0) — 準備

$A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha \in \mathbf{K}$ とします.

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)g(\lambda), \quad g(\alpha) \neq 0$$

ならば

$$\dim V(\alpha) = 1$$

固有空間分解 (1)

$A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して、固有値 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が単純としよう。

$$\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$$

このとき

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

固有空間分解 (2)

$\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha), \vec{v}_2 \in V(\beta), \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

とすると $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を \vec{v} で表せるか。

固有空間分解 (3)

そのアイデア (1) $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$, $\vec{v} \in V(\alpha)$ に対して

$$f(A)\vec{v} = f(\alpha)\vec{v}$$

固有空間分解 (4)

そのアイデア (2)

$$\frac{(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(\lambda - \alpha)(\lambda - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} = 1$$