

# 3次元固有値問題 (1)

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

2011年10月18日 at 駒場

V02 2019年10月04日 at 駒場

V03c 2020年9月25日 at 駒場

$$M_3(\mathbf{K}) = \{A; \text{3次正方行列}\}$$

以下の定理は線型代数の基本である.

## Theorem

**定理**  $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$  に対して以下は同値である.

- (1)  $A$  は正則である.
- (2)  $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$  に対して  $A\vec{v} = \vec{0}$  ならば  $\vec{v} = \vec{0}$
- (2)'  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  は1次独立である.
- (3)  $f_A: \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K}^3$  は単射である.
- (4)  $f_A: \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K}^3$  は全射である.
- (5)  $\det(A) \neq 0$
- (6)  $A \rightarrow \cdots \rightarrow I_3$  と行基本変形できる.

# 3次元の固有値問題

- $A \in M_3(\mathbf{K})$  とする. このとき  $\alpha \in \mathbf{K}$  に対して

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \alpha\vec{v} \text{ を満たす } \vec{v} (\neq \vec{0}) \in \mathbf{K}^3 \text{ が存在する} \\ &\Leftrightarrow \det(\alpha I_3 - A) = 0 \end{aligned}$$

- $\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_3 - A) \in \mathbf{K}[\lambda]$  を  $A$  の固有多項式と呼ぶ.
- $A = (a_{ij})$  とすると

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + C\lambda - \det(A)$$

- **問題** これはなぜか.  $C$  は求まるか.

# 固有多項式の性質

- $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{K})$  に対して

$$\text{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

を  $A$  のトレース (trace) と呼ぶ.

- **定理**  $P$  が正則な 3 次正方行列であるとする

$$\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)$$

- **証明**

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - P^{-1}AP) &= \det(P^{-1}\lambda I_3P - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(\lambda I_3 - A)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(\lambda I_3 - A) \det(P)\end{aligned}$$

- 系

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A)$$

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

- 定理 複素係数の多項式

$$f(\lambda) = \lambda^\ell + a_{\ell-1}\lambda^{\ell-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbf{C}[\lambda]$$

は

$$f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_\ell)$$

と1次式の積に分解できる ( $\alpha_j \in \mathbf{C}$ ).

- $A \in M_3(\mathbf{K})$  とすると

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

と因数分解できる. ただし  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$ .

**定理 1**  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$  とする. このとき

$$\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$$

ならば正則な  $P \in M_3(\mathbf{K})$  が存在して

$$P^{-1}AP$$

を対角行列とできる.

**定理2**  $A \in M_3(\mathbf{K})$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ ,  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$  が以下の条件を満たすとします.

$$\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$$

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$$

このとき  $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$  は正則となります.



## 定理 1 の証明 (2)—定理 2 の証明

$$c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 + c_3 \vec{p}_3 = \vec{0} \quad (1)$$

とします. (1) の両辺に  $A - \gamma I_3$  を掛けると

$$c_1(\alpha - \gamma)\vec{p}_1 + c_2(\beta - \gamma)\vec{p}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

さらに (2) の両辺に  $A - \beta I_3$  を掛けると

$$c_1(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta)\vec{p}_1 = \vec{0}$$

$\vec{p}_1 \neq 0$  から  $c_1 = 0$  が従う.

## 定理 1 の証明 (3)

定理 1 の状況で, ある  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$  が存在して

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3, \vec{p}_1 \neq \vec{0}, \vec{p}_2 \neq \vec{0}, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$$

が成立します.

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (\alpha\vec{p}_1 \ \beta\vec{p}_2 \ \gamma\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで定理 2 から  $P$  が正則であることが分かりますから, 定理 1 が証明されます.

## 具体例 (1)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  を対角化します. (SLIN2020L08 確認問題 V(2))

## 具体例 (2)—固有 polynomial

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)\end{aligned}$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = -1, 1, 2$  であることが分かります。

## 具体例(3)—固有ベクトル

(i)  $\lambda = -1$  のとき行列式の計算における行基本変形を用いると

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\#1)$$

であることが分かります。さらに

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, y = 0$$

となります。これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります。

## 具体例(4)—固有ベクトル

(ii)  $\lambda = 1$  のとき 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\#2)$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#2) \Leftrightarrow x - 3z = 0, \quad y - 2z = 0$$

となります。これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります。

## 具体例(5)—固有ベクトル

(iii)  $\lambda = 2$  のとき 固有多項式を求めるために用いた行基本変形を用いると

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\#3)$$

において

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, y = 3z$$

となります。これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります。

## 具体例(6)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

とすれば、相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから、 $P$  は正則となります。このとき

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (-1 \cdot \vec{p}_1 \ 1 \cdot \vec{p}_2 \ 2 \cdot \vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$