3 次元固有値問題 (1)

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

EV03c 2920 年 10 月 05,06 日 at HC, 経済数学入門・経済数学
EV04a 2021 年 11 月 at HC, 線形代数続論・経済数学入門

復習

$$M_3(\mathbf{K}) = \{A;\ 3次正方行列\}$$

以下の定理は線型代数の基本である.

Theorem

定理 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して以下は同値である.

(1) A は正則である.

(2) $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して $A\vec{v} = \vec{0}$ ならば $\vec{v} = \vec{0}$

(2)' $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ は 1 次独立である.

(3) $f_A:\ \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$ は単射である.

(4) $f_A:\ \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$ は全射である.

(5) $\det(A) \neq 0$

(6) $A \to \cdots \to I_3$ と行基本変形できる.

復習 (2)

定義 写像 $f: X \to Y$ に対して任意の $x, x' \in X$ に対して

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

が成立するならば f は**単射**であるといいます.

前ページの定理にある (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (5) は前期で学んだはずである.
(3) $\Rightarrow$ (4) を示そう.
$f_A(\vec{v}) = f_A(\vec{w})$ とすると

$$f_A(\vec{v} - \vec{w}) = f_A(\vec{v}) - f_A(\vec{w}) = \vec{0}$$

となる. $A(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$ となるが (3) を用いると

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{0} \quad \text{従って} \quad \vec{v} = \vec{w}$$

復習 (3)

(4) $\Rightarrow$ (3) を示そう．
$A\vec{v} = \vec{0}$ とする． $A\vec{0} = \vec{0}$ なので

$$A\vec{v} = A\vec{0} \quad \text{すなわち} \quad f_A(\vec{v}) = f_A(\vec{0})$$

が従うが，(4) から $\vec{v} = \vec{0}$ となる．

復習 (4)

定義 写像 $f\colon X \to Y$ が与えられているとします.

$$\forall y \in Y \text{ に対して } \exists x \in X \quad f(x) = Y$$

が成立するならば f は**全射**であるといいます.

(1) $\Rightarrow$ (4) を示します.
$\forall \vec{w} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$A(A^{-1}\vec{w}) = AA^{-1}\vec{w} = I_3\vec{w} = \vec{w}$$

から $\vec{v} := A^{-1}\vec{w}$ が $f_A(\vec{v}) = \vec{w}$ を満たします.

復習 (5)

(4) $\Rightarrow$ (5) を示します．(4) を用いると

$$f_A(\vec{v}_1) = \vec{e}_1, \quad f_A(\vec{v}_2) = \vec{e}_2, \quad f_A(\vec{v}_3) = \vec{e}_3$$

すなわち

$$A\vec{v}_1 = \vec{e}_1, \quad A\vec{v}_2 = \vec{e}_2, \quad A\vec{v}_3 = \vec{e}_3$$

これは

$$A(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) = I_3$$

を意味します．この最左辺と最右辺の行列式を考えると

$$\det(A) \cdot |\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3| = \det(I_3) = 1 \neq 0$$

から $\det(A) \neq 0$ が従います．

復習 (6)

Theorem

定理 $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して以下は同値である.
(1) A は正則である.
(2) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
(5) $\det(A) \neq 0$

特に

$$\exists \vec{v} \in \mathbf{K}^3\ A\vec{v} = \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0} \Longleftrightarrow \det(A) = 0$$

3 次元の固有値問題

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ とする．このとき $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&A\vec{v} = \alpha\vec{v} \text{ を満たす} \vec{v}(\neq \vec{0}) \in \mathbf{K}^3 \text{が存在する} \\
&\Leftrightarrow \det(\alpha I_3 - A) = 0
\end{aligned}
$$

- $\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_3 - A) \in \mathbf{K}[\lambda]$ を A の固有多項式と呼ぶ.
- $A = (a_{ij})$ とすると

$$
\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + C\lambda - \det(A)
$$

- **問題** これはなぜか．C は求まるか.

固有多項式の性質

- $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$\mathrm{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

  を A のトレース (trace) と呼ぶ.
- **定理** P が正則な 3 次正方行列であるとすると

$$\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)$$

- **証明**

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - P^{-1}AP) &= \det(P^{-1}\lambda I_3 P - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(\lambda I_3 - A)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I_3 - A)\det(P)\end{aligned}$$

固有多項式の性質（2）

- **系**

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$$

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

代数学の基本定理

- **定理**　複素係数の多項式

$$f(\lambda) = \lambda^{\ell} + a_{\ell-1}\lambda^{\ell-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbf{C}[\lambda]$$

は

$$f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_{\ell})$$

と 1 次式の積に分解できる（$\alpha_j \in \mathbf{C}$）.

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ とすると

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

と因数分解できる．ただし $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$.

対角化の十分条件

定理 1 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ とする．このとき

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

ならば正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP$$

を対角行列とできる．

定理 1 の証明 (1)—定理 2

定理 2 $A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$, $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が以下の条件を満たすとします.

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2,\ A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$$

このとき $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となります.

定理 1 の証明 (2)—定理 2 の証明

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0} \tag{1}$$

とします．(1) の両辺に $A - \gamma I_3$ を掛けると

$$c_1(\alpha - \gamma)\vec{p}_1 + c_2(\beta - \gamma)\vec{p}_2 = \vec{0} \tag{2}$$

さらに (2) の両辺に $A - \beta I_3$ を掛けると

$$c_1(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta)\vec{p}_1 = \vec{0}$$

$\vec{p}_1 \neq 0$ から $c_1 = 0$ が従う．

定理 1 の証明 (3)

定理 1 の状況で，ある $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が存在して

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2,\ A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3, \quad \vec{p}_1 \neq \vec{0},\ \vec{p}_2 \neq \vec{0},\ \vec{p}_3 \neq \vec{0}$$

が成立します.

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} A\vec{p}_1 & A\vec{p}_2 & A\vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\vec{p}_1 & \beta\vec{p}_2 & \gamma\vec{p}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで定理 2 から P が正則であることが分かりますから，定理 1 が証明されます.

具体例 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ を対角化します．(確認問題)

具体例 (2)—固有多項式

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)
\end{aligned}
$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ であることが分かります.

具体例 (3)—固有ベクトル

(i) $\underline{\lambda = -1 \text{ のとき}}$行列式の計算における行基本変形を用いると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#1)$$

であることが分かります．さらに

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, \ \ y = 0$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります．

具体例 (4)—固有ベクトル

(ii) $\underline{\lambda = 1 \text{ のとき}}$ 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#2)$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#2) \Leftrightarrow x - 3z = 0, \quad y - 2z = 0$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります．

具体例 (5)—固有ベクトル

(iii) $\underline{\lambda = 2 \text{ のとき}}$ 固有多項式を求めるために用いた行基本変形を用いると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#3)$$

において

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, y = 3z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります．

具体例 (6)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

とすれば，相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから，P は正則となります．このとき

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (-1 \cdot \vec{p}_1\ 1 \cdot \vec{p}_2\ 2 \cdot \vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$