3 次正方行列の Jordan 標準形—対角化できない行列

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V01 2021 年 12 月 17 日 at 駒場上空

場合分け

前提

$$A \in M_3(\mathbf{K}), \quad A\text{の固有値は全て} \in \mathbf{K}$$

以下

$$\alpha \neq \beta, \quad \beta \neq \gamma, \quad \gamma \neq \beta$$

として

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$

と場合分けをして考えます.

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$

A は対角化可能です．正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ (1)

一般に

$$1 \leq \dim V(\alpha) \leq 2, \quad \dim V(\beta) = 1$$

が成立して

$$A\text{は対角化可能} \Leftrightarrow (A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3 \Leftrightarrow \dim V(\alpha) = 2$$

以下では

$$\dim V(\alpha) = 1 \quad (\Leftrightarrow (A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) \neq O_3)$$

の場合を考えます.

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ (2)

$$d_1(\lambda) := -\frac{\lambda-(2\alpha-\beta)}{(\beta-\alpha)^2}, \qquad d_2(\lambda) := \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}$$

とすると

$$1 = d_1(\lambda)(\lambda-\beta) + d_2(\lambda)(\lambda-\alpha)^2$$

が成立します．ここで

$$P_1 := d_1(A)(A-\beta I_3), \quad P_2 = d_2(A-\alpha I_3)^2$$

と定めると

$$I_3 = P_1 + P_2 \tag{1}$$

が成立します．C-H の定理から $(A-\alpha I_3)^2(A-\beta I_3) = O_3$ が成立しますから

$$P_1P_2 = d_1(A)d_2(A)(A-\alpha I_3)^2(A-\beta I_3) = O_3$$

が分かります．

(1) の両辺に P_1 (resp. P_2) を掛けると

$$P_1 = P_1^2 + P_1P_2 = P_1^2, \quad P_2 = P_2P_1 + P_2^2 = P_2^2$$

が成立します.
以上で以下が示されました.

$$I_3 = P_1 * P_2, \quad P_iP_j = \begin{cases} P_i & i=j \\ O_3 & i \neq j \end{cases} \tag{2}$$

ここで $I_3 = P_1 + P_2$ から

$$\mathbf{K}^3 = \mathrm{Im}\ P_1 + \mathrm{Im}\ P_2$$

が成立します.

さらに $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^3$ が

$$P_1\vec{x} + P_2\vec{y} = \vec{0}$$

を満たすとき，両辺に P_1 および P_2 を掛けると $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_1P_2 = P_2P_2 = O_3$ から

$$P_1\vec{x} = \vec{0},\ P_2\vec{y} = \vec{0}$$

となります．従って

$$\mathbf{K}^3 = \mathrm{Im}\ P_1 \oplus \mathrm{Im}\ P_2$$

となります．$\vec{w}_1 \in \mathrm{Im}(P_1)$ は P_1 の定義から

$$\vec{w}_1 = d_1(A)(A - \beta I_3)\vec{v}_1$$

と $\vec{v}_1 \in \mathbf{K}^3$ を用いて表せます．このとき C-H の定理によって

$$(A - \alpha I_3)^2\vec{w}_1 = d_1(A)(A - \alpha I_3)^2(A - \beta I_3)\vec{v}_1 = d_1(A)O_3\vec{v}_1 = \vec{0}$$

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ (5)

以上で

$$\mathrm{Im}\ P_1 \subset W(\alpha) := \ker(A - \alpha I_3)^2$$

が成立することが示されました．同様に

$$\mathrm{Im}\ P_2 \subset W(\beta) := \ker(A - \beta I_3) = V(\beta)$$

も成立します．さらに和 $W(\alpha) + V(\beta)$ は直和になります．実際 $\vec{w}_1 \in W(\alpha)$, $\vec{w}_2 \in V(\beta)$ が

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0}$$

を満たすとすると，両辺に $(A - \alpha I_3)^2$ を掛けると $(\beta - \alpha)^2 \vec{w}_2 = 0$ 従って $\vec{w}_2 = \vec{0}$ が従います．以上で

$$\mathbf{K}^3 \subset \mathrm{Im}\ P_1 \oplus \mathrm{Im}\ P_2 \subset W(\alpha) \oplus V(\beta) \subset \mathbf{K}^3$$

が成立することが分かります．

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ (6)

この式の包含はすべて等しくなり

$$\mathbf{K}^3 = \mathrm{Im}\ P_1 \oplus \mathrm{Im}\ P_2 = W(\alpha) \oplus V(\beta) = \mathbf{K}^3$$

であることが分かります．以上から

$$\dim \mathrm{Im}\ P_1 + \dim \mathrm{Im}\ P_2 = \dim W(\alpha) + \dim V(\beta) = 3$$

が分かります．他方 $\mathrm{Im}\ P_1 \subset W(\alpha)$, $\mathrm{Im}\ P_2 \subset V(\beta)$ から

$$\dim \mathrm{Im}\ P_1 \leq \dim W(\alpha), \quad \dim \mathrm{Im}\ P_2 \leq \dim V(\beta)$$

が分かります．$\dim \mathrm{Im}\ P_1 + \dim \mathrm{Im}\ P_2 = \dim W(\alpha) + \dim V(\beta)$ から

$$\dim \mathrm{Im}\ P_1 = \dim W(\alpha), \quad \dim \mathrm{Im}\ P_2 = \dim V(\beta)$$

従って $\mathrm{Im}\ P_1 = W(\alpha), \quad \mathrm{Im}\ P_2 = V(\beta)$ が成立することが分かりました．

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ (5)

ここで任意の $\vec{v} \in W(\alpha)$ に対して $(A-\alpha I_3)\vec{v} = \vec{0}$ とすると

$$2 = \dim W(\alpha) = V(\alpha)$$

となるので，A は対角化可能となります．従ってある $\vec{q}_1 \in W(\alpha)$ に対して

$$\vec{q}_2 := (A-\alpha I_3)\vec{q}_1 \neq \vec{0}$$

となります．このとき $\vec{q}_1 \nparallel \vec{q}_2$ も成立して（これを示そう）$\vec{q}_1, \vec{q}_2$ は $W(\alpha)$ の基底となります．さらに

$$(A-\alpha I_3)\vec{q}_2 = (A-\alpha I_3)^2\vec{q}_1 = \vec{0}$$

他方 $V(\beta)$ は 1 次元で $\vec{q}_3 \in V(\beta)$ で $\vec{q}_3 \neq \vec{0}$ であるものが存在します．

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ (6)

ここで

$$Q := (\vec{q}_1 \ \ \vec{q}_2 \ \ \vec{q}_3)$$

とすると Q は正則で

$$\begin{aligned} AQ &= (A\vec{q}_1 \ \ A\vec{q}_2 \ \ A\vec{q}_3) = (\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2 \ \ \alpha\vec{q}_2 \ \ \beta\vec{q}_3) \\ &= (\vec{q}_1 \ \ \vec{q}_2 \ \ \vec{q}_3) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

となります（A の Jordan 標準形）．

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ (1)

C-H の定理から $(A - \alpha I_3)^3 = O_3$ となります．さらに

$$A\text{が対角化可能} \Leftrightarrow A = \alpha I_3$$

であることにも注意します．
$\underline{(A - \alpha I_3)^2 \neq O_3 \text{ のとき}}$　ある $\vec{q}_1 \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{q}_3 := (A - \alpha I_3)\vec{q}_1 \neq \vec{0}$$

が成立します．さらに $\vec{q}_2 := (A - \alpha I_3)\vec{q}_1$ とすると $\vec{q}_3 = (A - \alpha I_3)\vec{q}_2$ で

$$\vec{q}_1,\ \vec{q}_2,\ \vec{q}_3 \text{は LI である}$$

ことが分かります．さらに $(A - \alpha I_3)^3 = O_3$ から $(A - \alpha I_3)\vec{q}_3 = (A - \alpha I_3)^3\vec{q}_1 = \vec{0}$ から $Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$ とすると

$$AQ = A(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2\ \ \alpha\vec{q}_2 + \vec{q}_3\ \ \alpha\vec{q}_3) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

従って $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ となります．

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ (2)

$(A - \alpha I_3)^2 = O_3$ のとき

$$\dim \operatorname{Im}(A - \alpha I_3) = 1$$

となります．実際

$$(A - \alpha I_3)\vec{p}_1 \nparallel (A - \alpha I_3)\vec{p}_2$$

である $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ が存在すると

$$\vec{p}_1, (A - \alpha I_3)\vec{p}_1, \vec{P}_2, (A - \alpha I_3)\vec{p}_2$$

は LI となりますから，$\dim \mathbf{K}^3 = 3$ に版します．他方 $\dim \operatorname{Im}(A - \alpha I_3) = 0$ とすると次元定理から $\dim V(\alpha) = \dim \ker(A - \alpha I_3) = 3$ となりますが，対角化できないことに反します．
この状況で次元定理によって

$$\dim V(\alpha) = \dim \ker(A - \alpha I_3) = 2$$

となります．

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ (3)

ここで $\vec{p}_1$ を $\vec{p}_2(A - \alpha I_3)\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ となるように選びます．このとき $(A - \alpha I_3)\vec{p}_2 = (A - \alpha I_3)^2\vec{P}_1 = \vec{0}$ から $\vec{p}_2 \in V(\alpha)$ となります．さらに $\vec{p}_3 \in V(\alpha)$ を $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ が $V(\alpha)$ の基底となるように選びます．このとき

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \text{は LI}$$

となります．実際 $c_1\vec{P}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ とすると，この両辺に $A - \alpha I_3$ を掛けると $c_1\vec{P}_2 = \vec{0}$ となります．$\vec{p}_2 \neq 0$ から $c_1 = 0$ となります．従って $c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ となりますが，$\vec{p}_3$ の取り方から $c_2 = c_3 = 0$ であることが分かります．
ここで $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ とすると

$$A(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

から $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ となります．