実2次対称行列の対角化

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

May 2019 for emath
V03 Oct 2020 for CalcNT
V04 Jul 30 2021 for SLIN

実 2 次実対称行列の固有方程式

- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ の固有多項式

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2 \end{aligned}$$

- 2 次方程式 $\Phi_A(\lambda) = 0$ の判別式 (discriminant)

$$D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0$$

2 次実対称行列の固有方程式 (No. 2)

- **定理**　2 次実対称行列の固有値は実数である。
- **注意**　$D = 0$ のとき

$$a = b,\ c = 0 \quad \text{従って} \quad A = aI_2$$

- 以下 $D > 0$ とする。$\Phi_A(\lambda) = 0$ の 2 解を α と β として

$$\alpha \neq \beta$$

- このとき

$$\alpha + \beta = a + b, \quad \alpha\beta = ab - c^2 = \det(A)$$

具体例 (1)

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

なので A の固有ベクトルは $\lambda = 1, 6$

<u>$\lambda = 1$ のとき</u>

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

具体例 (2)

<u>$\lambda = 6$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

ここで

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると R は回転行列で

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ 6\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

から $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ と回転行列 R を用いて対角化できます.

$\alpha \neq \beta$ のときの固有ベクトル（準備）

- **定理**　$B \in M_2(\mathbf{R})$ とする。このとき $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(B\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t B\vec{y})$$

- **（証明）**

$$\begin{aligned}
(B\vec{x}, \vec{y}) &= (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2, \vec{y}) = x_1(\vec{b}_1, \vec{y}) + x_2(\vec{b}_2, \vec{y}) \\
&= x_1 {}^t\vec{b}_1\vec{y} + x_2 {}^t\vec{b}_2\vec{y} = \left(\vec{x}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1\vec{y} \\ {}^t\vec{b}_2\vec{y} \end{pmatrix}\right) = (\vec{x}, {}^t B\vec{y})
\end{aligned}$$

$\alpha \neq \beta$ のときの固有ベクトル

- **定理**　$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$、$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ ならば

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

- **（証明）** ${}^tA = A$ だから $(A\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_1, A\vec{p}_2)$

$$(A\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$(\vec{p}_1, A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1, \beta\vec{p}_2) = \beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \to (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

実対称行列は回転行列で対角化可能

- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$、$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$、$\vec{p}_i \neq \vec{0} (i = 1, 2)$ とする。

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{||\vec{p}_1||}\vec{p}_1, \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{||\vec{p}_2||}\vec{p}_2$$

とすると

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0, \ ||\vec{q}_1|| = ||\vec{q}_2|| = 1$$

- $\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

実対称行列は回転行列で対角化可能 (No.2)

- $(\vec{q}_1\ \ \vec{q}_2)$ または $(\vec{q}_1\ \ -\vec{q}_2)$ は回転行列である。
- **定理**　2 次対称行列 A は回転行列で対角化可能である。すなわち、回転行列 R が存在して

$$AR = R\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

具体例 (3)

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ は回転行列 $R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で

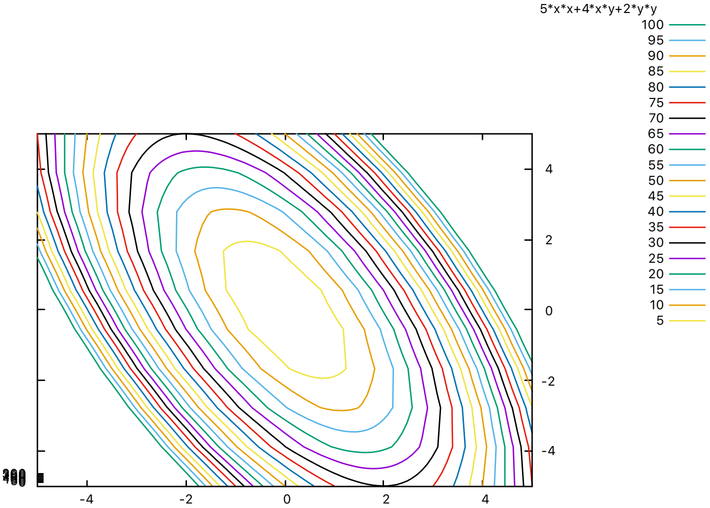
$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

と対角化可能であったので,

$$\begin{aligned}(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= \left(R^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(R^{-1}AR \cdot R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \xi^2 + 6\eta^2\end{aligned}$$

ここで回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ を用いました.

具体例 (4)—等高線 plot



2 次形式の標準形

- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が定める 2 次形式

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

- R^{-1} が回転行列で、内積を保つから

$$\begin{aligned} \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(R^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(R^{-1}AR \cdot R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

2 次形式の標準形 (No.2)

- 回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2$$

-

$$\begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \alpha \xi^2 + \beta \eta^2 \end{aligned}$$

2 次形式の正定値性 No.1

- 2 次形式の正定値性（負定値性）

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \alpha, \beta > 0$$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \alpha, \beta < 0$$

- 正定値性について（$\Rightarrow$）$R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$ のとき

$$(A\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\alpha\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha \cdot ||\vec{r}_1||^2 = \alpha > 0$$

$$(A\vec{r}_2, \vec{r}_2) = (\beta\vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta \cdot ||\vec{r}_2||^2 = \beta > 0$$

2 次形式の正定値性 (No.2)

- 正定値性について（$\Leftarrow$ ）$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に注意。

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \geq 0$$

さらに

$$\begin{aligned} \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = 0 \quad &\to \quad \alpha\xi^2 = \beta\eta^2 = 0 \\ &\to \quad \xi = \eta = 0 \to x = y = 0 \end{aligned}$$

- **N.B.** $A, B \geq 0$ のとき

$$A + B = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$$

2 次形式の正定値性 (No.3)

- 正定値性を A の係数で判定する

$$\alpha,\ \beta > 0 \Leftrightarrow a > 0,\ \det(A) = ab - c^2 > 0$$

$$\alpha,\ \beta < 0 \Leftrightarrow a < 0,\ \det(A) = ab - c^2 > 0$$

- （注意）$a + b = \alpha + \beta$ と $\alpha\beta = ab - c^2$
- （注意）$\alpha, \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$
- （正定値性）$(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} ab - c^2 = \alpha\beta > 0 \quad &\to \quad ab > 0 \\ a + b = \alpha + \beta > 0 \quad &\to \quad a + b > 0 \to a, b > 0 \end{aligned}$$

2次形式の正定値性 (No.4)

- （正定値性）$(\Leftarrow)$

$$
\begin{aligned}
ab - c^2 > 0 \quad &\to \quad ab > 0 \\
a > 0, ab > 0 \quad &\to \quad b > 0 \\
&\quad\ \ \alpha + \beta = a + b > 0 \\
&\quad\ \ \alpha\beta = ab - c^2 > 0
\end{aligned}
$$

- **注意**　$\det(A) = ab - c^2 < 0$ のとき $\alpha\beta < 0$

2 次形式の正定値性 (No.5)—まとめ

実対称行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & b \end{smallmatrix}\right)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(i)\ (A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0}) &\Leftrightarrow (ii)\ A\text{の固有値}\alpha, \beta > 0 \\
&\Leftrightarrow (iii)\ a > 0, \quad |A| > 0
\end{aligned}
$$

2 次形式の正定値性 (No.6)—補足 (1)

(i)⇒(iii) $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ のとき

$$\left(A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right) = a > 0$$

となります．さらに

$$\begin{aligned}\left(A\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) &= ax^2 + 2cxy + by^2 \\ &= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2\end{aligned}$$

において $\vec{v} = \vec{v}_0 := \begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\1\end{pmatrix}$ とすると

$$(A\vec{v}_0, \vec{v}_0) = \frac{ab - c^2}{a} > 0$$

となりますから $\det(A) = ab - c^2 > 0$ が従います．

2 次形式の正定値性 (No.7)—補足 (1)

(iii)⇒(i) $a > 0,\ ab - c^2 > 0$ なので

$$\begin{aligned}(A\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)) &= ax^2 + 2cxy + by^2 \\ &= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0\end{aligned}$$

となります．最後の不等号の等号成立の条件は

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$$

で，$x = y = 0$ と同値です．従って

$$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (A\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)) > 0$$