2 次正方行列の逆行列・回転行列・直交射影

Nobuyuki TOSE

経済数学, May 07, 2019

2 次正方行列の積

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

に対して

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \\ &= x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{x} \\ \mathbf{a}_2\vec{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$AB = \left(A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{b}_1 & \mathbf{a}_1\vec{b}_2 \\ \mathbf{a}_2\vec{b}_1 & \mathbf{a}_2\vec{b}_2 \end{pmatrix}$$

行列の積の基本性質

線型性

$$X(\vec{p}+\vec{q}) = X\vec{p} + X\vec{q}, \quad X(\lambda\vec{p}) = \lambda\,(X\vec{p})$$

$$\begin{aligned}
LHS &= X\begin{pmatrix} p_1+q_1 \\ p_2+q_2 \end{pmatrix} = (p_1+q_1)\vec{a} + (p_2+q_2)\vec{b} \\
&= (p_1\vec{a}+p_2\vec{b}) + (q_1\vec{a}+q_2\vec{b}) = X\vec{p} + X\vec{q} \\
LHS &= X\begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \end{pmatrix} = (\lambda p_1)\,\vec{a} + (\lambda p_2)\,\vec{b} \\
&= \lambda(p_1\vec{a}) + \lambda(p_2\vec{b}) \\
&= \lambda(p_1\vec{a}+p_2\vec{b}) = \lambda(X\vec{p})
\end{aligned}$$

行列の積の基本性質 (2)

線型性 (2)

$$X(\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}) = \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q})$$

$$\begin{aligned} LHS &= X(\lambda\vec{p}) + X(\mu\vec{q}) \\ &= \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q}) \end{aligned}$$

結合法則

結合法則 (1)

2 次正方行列 $X = (\vec{a}\ \vec{b})$, $Y = (\vec{p}\ \vec{q})$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$X(Y\vec{c}) = (XY)\vec{c}$$

$$\begin{aligned} LHS &= X(c_1\vec{p} + c_2\vec{q}) = c_1(X\vec{p}) + c_2(X\vec{q}) \\ &= (X\vec{p}\ X\vec{q})\vec{c} = (XY)\vec{c} \end{aligned}$$

結合法則

結合法則 (2)

$Z=(\vec{c}\ \vec{d})=\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$(XY)Z=X(YZ)$$

$$\begin{aligned} LHS &= (XY)(\vec{c}\ \vec{d}) = \Big((XY)\vec{c}\ (XY)\vec{d}\Big) \\ &= \Big(X(Y\vec{c})\ X(Y\vec{d})\Big) = X\left(Y\vec{c}\ Y\vec{d}\right) \\ &= X(YZ) \end{aligned}$$

単位行列 (1)

$$\text{標準単位ベクトル} \qquad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いて単位行列

$$I_2 = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2)$$

が定義できます．2 列の行列 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$ に対して

$$A\vec{e}_1 = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_1$$

$$A\vec{e}_2 = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2$$

従って

$$AI_2 = (A\vec{e}_1 \ A\vec{e}_2) = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = A$$

単位行列 (2)

$$\mathbf{R}^2 \ni \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = I_2\vec{x}$$

から，2 次正方行列 $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2)$ に対して

$$I_2B = I_2(\vec{b}_1\ \vec{b}_2) = (I_2\vec{b}_1\ I_2\vec{b}_2) = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2) = B$$

余因子行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = |A| \cdot I_2$$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = |A| \cdot I_2$$

A の余因子行列を $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ と定めると

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = |A| \cdot I_2$$

余因子行列 (2)

公式

$A, B \in M_2(\mathbf{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$(\lambda A)\, B = A\,(\lambda B) = \lambda(AB) \tag{1}$$

$$\lambda\,(\mu A) = (\lambda\mu)A \tag{2}$$

を用いると

$$|A| = ad - bc \neq 0 \quad \text{ならば} \quad A \cdot \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) \cdot A = I_2$$

注意

$$\lambda A = (\lambda \vec{a}_1 \ \lambda \vec{a}_2)$$

公式の証明 (1)

(1) は $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(\lambda A)\,\vec{b} = A\left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\left(A\vec{b}\right)$$

をまず示す.

$$\begin{aligned}(\lambda A)\,\vec{b} &= (\lambda\vec{a}_1\ \lambda\vec{a}_2)\,\vec{b} = b_1(\lambda\vec{a}_1) + b_2(\lambda\vec{a}_2)\\ &= \lambda\,(b_1\vec{a}_1 + b_2\vec{a}_2) = \lambda\left(A\vec{b}\right)\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}(\lambda A)\,B &= \left((\lambda A)\vec{b}_1\ (\lambda A)\vec{b}_2\right) = \left(A(\lambda\vec{b}_1)\ A(\lambda\vec{b}_2)\right)\\ &= A\left(\lambda\vec{b}_1\ \lambda\vec{b}_2\right) = A\,(\lambda B)\end{aligned}$$

公式の証明 (2)

$$\lambda(AB) = \lambda(A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2) = (\lambda(A\vec{b}_1)\ \lambda(A\vec{b}_2))$$
$$= \left(A(\lambda\vec{b}_1)\ A(\lambda\vec{b}_2)\right) = A\left(\lambda\vec{b}_1\ \lambda\vec{b}_2\right) = A\,(\lambda B)$$

(2) を示すには

$$\boxed{\lambda\left(\mu\vec{b}\right) = (\lambda\mu)\vec{b}}$$

を用います.

正則行列 (1)–定義

正則行列

$A \in M_2(\mathbf{R})$ が正則とは

$$AX = XA = I_2$$

を満たす $X \in M_2(\mathbf{R})$ が存在するときである.

注意（逆行列の一意性）

$$AX = XA = I_2, \quad AY = YA = I_2$$

とすると

$$X = XI_2 = X(AY) \stackrel{(*)}{=} (XA)Y = I_2Y = Y$$

と $X = Y$ が従う. 存在すれば一意的に定まるこの行列を A の**逆行列**と呼んで A^{-1} と記します. ((*) において結合則を用いています.)

正則行列 (2)

定理

$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbf{R})$ とします．$|A| \neq 0$ ならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

注意

$$(1)\ |A| \neq 0 \Rightarrow (2)\ A\text{は正則}$$
$$\overset{(*)}{\Rightarrow} (3)\ \left(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}\right)$$

正則行列 (3)

(3)⇒(1) の対偶

$$|A| = 0 \;\Rightarrow\; \exists \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0} \quad A \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$$

$|A| = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$A \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad A \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となる.

$$d \neq 0 \;\vee c \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad b \neq 0 \;\vee a \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

正則行列 (4)

これに当てはまらない場合は $a = b = c = d = 0$, すなわち $A = O_2$ となる．このときは明らか：

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad O_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} &(1)\ |A| \neq 0 \Leftrightarrow (2)\ A\text{は正則} \\ &\qquad \Leftrightarrow\ (3)\ \left(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}\right) \end{aligned}$$

回転行列

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

特に

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

回転行列 (2)

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とすると

$$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

特に

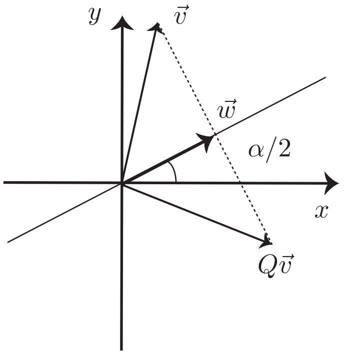
$$R_\theta R_{-\theta} = R_{-\theta} R_\theta = R_0 = I_2$$

から $\underline{R_\theta \text{ は正則}}$ で

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$$

折り返し (1)

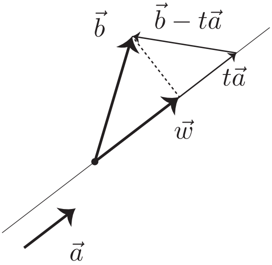
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha+\sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$



折り返し (2)——直交射影

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$，$\vec{a} \neq \vec{0}$ であるとき．$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}$$



求め方 (1) $(\vec{a}, \vec{b} - t\vec{a}) = 0$
求め方 (2) $\|\vec{b} - t\vec{a}\|^2$ を最小化

折り返し (3)

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ 方向への直交射影

$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= \frac{(\vec{v}, \vec{p}_1)}{\|\vec{p}_1\|^2}\vec{p}_1 \\
&= (x\cos\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2}) \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\cos^2\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ x\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + y\sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
Q\vec{v} &= \vec{v} - 2(\vec{v} - \vec{w}) = 2\vec{w} - \vec{v} \\
&= \left(2\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} - I_2\right)\vec{v} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1 \end{pmatrix}\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\vec{v}
\end{aligned}
$$

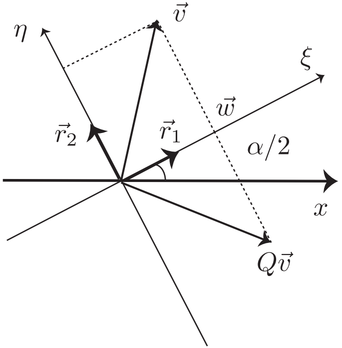
別の見方—座標変換

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \xi\vec{r}_1 + \eta\vec{r}_2 = R\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$$

のとき

$$\begin{aligned} Q\vec{v} &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \xi\vec{r}_1 - \eta\vec{r}_2 = R\begin{pmatrix} \xi \\ -\eta \end{pmatrix} \\ &= R\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) \\ &= R\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)R^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$



$$Q = R\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$