

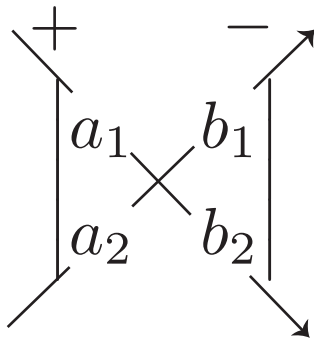
2 次の行列式

Nobuyuki TOSE

MSF2019 L05, May 10, 2019

定義

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$



列の基本性質

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

に対して

I (2重線型性-各列に関して線型)

$$|\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad \vec{c}| = \lambda \cdot |\vec{a} \quad \vec{c}| + \mu \cdot |\vec{b} \quad \vec{c}|$$

$$|\vec{a} \quad \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}| = \lambda \cdot |\vec{a} \quad \vec{b}| + \mu \cdot |\vec{a} \quad \vec{c}|$$

II (交代性)

$$|\vec{a} \quad \vec{b}| = -|\vec{b} \quad \vec{a}|$$

III (正規性)

$$|I_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

基本性質 (I) の証明について

補題 写像

$$F: \mathbf{K}^2 \rightarrow \mathbf{K} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto px_1 + qx_2$$

は

$$F(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \cdot F(\vec{a}) + \mu \cdot F(\vec{b})$$

を満たす。

基本性質から導かれる性質

$$\text{II}' \quad |\vec{a} \quad \vec{a}| = 0$$

$$\text{(II)} \text{ から } |\vec{a} \quad \vec{a}| = -|\vec{a} \quad \vec{a}|$$

$$\text{IV} \quad |\vec{a} \quad \vec{b}| = |\vec{a} \quad \lambda\vec{a} + \vec{b}|, \quad |\vec{a} \quad \vec{b}| = |\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad \vec{b}|$$

$$|\vec{a} \quad \lambda\vec{a} + \vec{b}| = \lambda \cdot |\vec{a} \quad \vec{a}| + |\vec{a} \quad \vec{b}| = \lambda \cdot 0 + |\vec{a} \quad \vec{b}| = |\vec{a} \quad \vec{b}|$$

ベクトルと行列の転置 (1)

ベクトルの転置

$${}^t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2), \quad {}^t(a_1 \ a_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

(転置の線型性) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^2$ に対して

$${}^t(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \cdot {}^t \vec{a} + \mu \cdot {}^t \vec{b}$$

行ベクトル $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2) \in (\mathbf{K}^2)^*$ に対しても

$${}^t(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda \cdot {}^t \mathbf{a} + \mu \cdot {}^t \mathbf{b}$$

ベクトルと行列の転置 (2)

行列の転置 2次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$${}^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t \vec{a}_1 \\ {}^t \vec{a}_2 \end{pmatrix} = ({}^t \mathbf{a}_1 \ {}^t \mathbf{a}_2)$$

転置行列の行列式

2次正方行列 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$|{}^t A| = |A|, \quad \begin{vmatrix} {}^t \vec{a}_1 \\ {}^t \vec{a}_2 \end{vmatrix} = |\vec{a}_1 \ \vec{a}_2|, \quad |{}^t \mathbf{a}_1 \ {}^t \mathbf{a}_2| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}$$

成分では

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

行の基本性質 (1)

I (2重線型性—行に関して線型)

$$\begin{vmatrix} \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

$$G: (\mathbf{K}^2)^* \rightarrow \mathbf{K} \quad (x \ y) \mapsto px + qy$$

が

$$G(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda G(\mathbf{a}) + \mu G(\mathbf{b})$$

を満たすことから示されます。または

$$\begin{vmatrix} \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = |{}^t(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \ {}^t \mathbf{c}| = |\lambda {}^t \mathbf{a} + \mu {}^t \mathbf{b} \ {}^t \mathbf{c}| = \lambda \cdot |{}^t \mathbf{a} \ {}^t \mathbf{c}| + \mu \cdot |{}^t \mathbf{b} \ {}^t \mathbf{c}| = RHS$$

行の基本性質 (2)

$$\text{II (交代性)} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix}$$

直接示すのが簡単ですが，将来一般的な場合を考えることを考慮して

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = |{}^t\mathbf{a} \ {}^t\mathbf{b}| = - |{}^t\mathbf{b} \ {}^t\mathbf{a}| = - \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix}$$

行の性質 (1)

$$\text{II}' \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} = 0$$

基本性質 II (交代性) を用いて

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix}$$

から分かります.

行の性質 (2)

$$\text{IV} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \mathbf{a} + \mathbf{b} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$$

基本性質 I と II (交代性) を用いて

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda \mathbf{a} + \mathbf{b} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$$

行列の積の行列式 (1)

$\forall X, Y \in M_2(\mathbf{K})$ に対して

$$|XY| = |X| \cdot |Y|$$

$$X = (\vec{a} \ \vec{b}), \quad Y = (\vec{p} \ \vec{q}) = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$XY = (p_1\vec{a} + p_2\vec{b} \quad q_1\vec{a} + q_2\vec{b})$$

行列の積の行列式 (2)

$$\begin{aligned} |XY| &= \left| p_1 \vec{a} + p_2 \vec{b} \quad q_1 \vec{a} + q_2 \vec{b} \right| \\ &= p_1 \left| \vec{a} \quad q_1 \vec{a} + q_2 \vec{b} \right| + p_2 \left| \vec{b} \quad q_1 \vec{a} + q_2 \vec{b} \right| \\ &= p_1 \left| \vec{a} \quad q_2 \vec{b} \right| + p_2 \left| \vec{b} \quad q_1 \vec{a} \right| \\ &= p_1 q_2 \left| \vec{a} \quad \vec{b} \right| + p_2 q_1 \left| \vec{b} \quad \vec{a} \right| \\ &= p_1 q_2 \left| \vec{a} \quad \vec{b} \right| - p_2 q_1 \left| \vec{a} \quad \vec{b} \right| \\ &= (p_1 q_2 - p_2 q_1) \left| \vec{a} \quad \vec{b} \right| = |Y| \cdot |X| \end{aligned}$$

行列の積の行列式 (3) —応用

定理 $A \in M_2(\mathbf{K})$ が正則ならば

$$|A| \neq 0$$