2 次正方行列の C-H の定理

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 04 月 19,26 日 at 駒場
2020 年 06 月 08 日　経済数学入門

Cayley-Hamilton の定理

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A^2 - (a+d)A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$$

- 具体例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $A^2 - 4A - 5I_2 = O_2$

$$A^2 - (5 + (-1))A + 5 \cdot (-1) I_2 = O_2$$

$$\to A(A + I_2) = 5(A + I_2), \quad A(A - 5I_2) = -(A - 5I_2)$$

$$\to A^n(A + I_2) = 5^n(A + I_2), \quad A^n(A - 5I_2) = (-1)^n(A - 5I_2)$$

$$\to 6A^n = 5^n(A + I_2) - (-1)^n(A - 5I_2)$$

Cayley-Hamilton の定理–その応用

- 2 次正方行列 A の固有値 $\alpha,\ \beta$ が $\alpha \neq \beta$

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I_2 = O_2$$

$$\to A(A - \alpha I_2) = \beta(A - \alpha I_2), \quad A(A - \beta I_2) = \alpha(A - \beta I_2)$$

$$\to A^n(A - \alpha I_2) = \beta^n(A - \alpha I_2), \quad A^n(A - \beta I_2) = \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\to (\beta - \alpha)A^n = \beta^n(A - \alpha I_2) - \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\to A^n = \frac{\beta^n}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_2) - \frac{\alpha^n}{\beta - \alpha}(A - \beta I_2)$$

固有多項式が重根を持つ場合

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ のとき

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -4 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

- $A^2 + 4A + 4I_2 = O_2$ から

$$A(A + 2I_2) = (-2)(A + 2I_2)$$

$$A^n(A + 2I_2) = (-2)^n(A + 2I_2)$$

固有多項式が重根を持つ場合（No.2）

- $A^n(A+2I_2)=(-2)^n(A+2I_2)$ の両辺を $(-2)^{n+1}$ で割る。

$$\frac{1}{(-2)^{n+1}}A^{n+1}-\frac{1}{(-2)^n}A^n=-\frac{1}{2}(A+2I_2)$$

- $B_n=\frac{1}{(-2)^n}A^n$ とすると $B_{n+1}-B_n=-\frac{1}{2}(A+2I_2)$

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{1}{2}(A+2I_2)-\cdots-\frac{1}{2}(A+2I_2)+B_0 \\ &= -\frac{n}{2}(A+2I_2)+I_2 \end{aligned}$$

から $A^n=n(-2)^{n-1}(A+2I_2)+(-2)^nI_2$

行列の多項式

- A：2 次正方行列

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

-

$$f(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_2$$

行列の多項式

- A：2 次正方行列

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

- $$f(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_2$$

行列の多項式

- A：2 次正方行列

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

- $$f(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_2$$

- $f(\lambda)$、$g(\lambda)$：多項式

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A),\ (f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$$

応用

- $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$ において $\alpha \neq \beta$

$$\lambda^n = q(\lambda)\Phi_A(\lambda) + a\lambda + b$$

と割り算する。

- $\lambda = \alpha$ あるいは $\lambda = \beta$ と代入

$$\beta^n = a\beta + b, \quad \alpha^n = a\alpha + b,$$

を解いて

$$a = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}, \ b = -\frac{\alpha\beta(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\beta - \alpha}$$

応用 (No.2)

- $A^n = q(A)\Phi_A(A) + aA + bI_2$ から
$$A^n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}A - \frac{\alpha\beta(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\beta - \alpha}I_2$$
- $$A^n = \alpha^n X_1 + \beta^n X_2$$
を満たす 2 次正方行列 X_1 と X_2 が存在する。
- 問 $\Phi_A(\lambda)$ が重根を持つときは？