第5章　行列の演算について

5.1　ベクトルの演算の性質（復習）

ベクトルの足し算とスカラー倍に関する基本的な定理 5.1 を述べましょう.

定理 5.1. **(1)** $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{5.1}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{5.2}$$

が成立します.
(2) $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{K}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ に対して

$$\lambda\,(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a} \tag{5.3}$$

$$(\lambda+\mu)\,\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a} \tag{5.4}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} \tag{5.5}$$

が成立します.

5.2　行列の和・差とスカラー倍

同じ**型**を持つ，すなわち同じ行数，列数を持つ行列の間には足し算（加法）と引き算（減法）が定義されます．$m \times n$ 行列，すなわち m 行 n 列の行列

$$A=(\vec{a}_1\cdots\vec{a}_j\cdots\vec{a}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_m\end{pmatrix}=(a_{ij})\,,\ B=(\vec{b}_1\cdots\vec{b}_j\cdots\vec{b}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}=(b_{ij})$$

に対してその和と差を

$$A+B=\left(\vec{a}_1+\vec{b}_1\cdots\vec{a}_j+\vec{b}_j\cdots\vec{a}_n+\vec{b}_n\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{b}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}=(a_{ij}+b_{ij})$$

$$A-B=\left(\vec{a}_1-\vec{b}_1\cdots\vec{a}_j-\vec{b}_j\cdots\vec{a}_n-\vec{b}_n\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{b}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{b}_m\end{pmatrix}=(a_{ij}-b_{ij})$$

と定めます．また定数 $\alpha\in\mathbf{K}$ に対して A の α 倍を

$$\alpha A=(\alpha\vec{a}_1\ \cdots\ \alpha\vec{a}_j\ \cdots\ \alpha\vec{a}_n)=\begin{pmatrix}\alpha\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \alpha\boldsymbol{a}_i\\ \vdots\\ \alpha\boldsymbol{a}_m\end{pmatrix}=(\alpha\cdot a_{ij})$$

で定義します．次に例

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\ \alpha&\beta&\gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d&e&f\\ \delta&\varepsilon&\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+d&b+e&c+f\\ \alpha+\delta&\beta+\varepsilon&\gamma+\varphi\end{pmatrix}$$

$$\mu\begin{pmatrix}a&b&c\\ \alpha&\beta&\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu a&\mu b&\mu c\\ \mu\alpha&\mu\beta&\mu\gamma\end{pmatrix}$$

を見て理解を深めましょう．

これまで $m\times n$ 行列 A, B に対して和・差とスカラー倍（定数倍）を定義しました．この 2 つの**優先順位**について注意します．すなわち $\lambda A\pm\mu B$ ですが,

$$\lambda A\pm\mu B=(\lambda A)\pm(\mu B)$$

とスカラー倍を計算した後に足し算・引き算をするのが唯一可能な計算順序です.

定理 5.2. m 行 n 列の行列 A, B, C に対して，以下が成立します.

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

(4) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

(5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

Proof. 以下では $A=(\vec{a}_j)$, $B=(\vec{b}_j)$, $C=(\vec{c}_j)$ と行列 $A,\ B,\ C$ の j 列を用いて定理を示します.
(1) $A+B=(\vec{a}_j+\vec{b}_j)=(\vec{b}_j+\vec{a}_j)=B+A$ から証明できます．ここで定理 5.1 の (5.1) を用いました.
(2) $(A+B)+C=(\vec{a}_j+\vec{b}_j)+(\vec{c}_j)=\Big((\vec{a}_j+\vec{b}_j)+\vec{c}_j\Big)=\Big(\vec{a}_j+(\vec{b}_j+\vec{c}_j)\Big)=A+(B+C)$ から証明できます．ここで定理 5.1 の (5.2) を用いました.
(3), **(4)**, **(5)**, については演習 5.1 とします. □

演習 5.1. 定理 *5.2* の **(3)**, **(4)**, **(5)** を証明しましょう.

5.3 行列の積

5.3.1 行列 × 列ベクトル

次に行列に右からベクトルを掛けることを考えます．上に与えた $m\times n$ 行列 $A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n)$ と n 次元列ベクトル $\vec{x}\in\mathbf{K}^n$，すなわち

$$A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_j & \cdots & \vec{a}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_m\end{pmatrix} \quad と \quad \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \tag{5.6}$$

との積を

$$A\vec{x}=x_1\vec{a}_1+\cdots+x_j\vec{a}_j+\cdots+x_n\vec{a}_n\in\mathbf{K}^m$$

と定義します．この両辺の第 i 成分に着目すると

$$\begin{aligned}A\vec{x} &= x_1\begin{pmatrix}\vdots\\ a_{i1}\\ \vdots\end{pmatrix}+\cdots+x_j\begin{pmatrix}\vdots\\ a_{ij}\\ \vdots\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}\vdots\\ a_{in}\\ \vdots\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\vdots\\ x_1a_{i1}+\cdots+x_ja_{ij}+\cdots+x_na_{in}\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots\\ \sum_{j=1}^n x_ja_{ij}\\ \vdots\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．ここで $\vec{p}=A\vec{x}={}^t(p_1\ p_2\ \cdots\ p_m)$ と成分表示すると，$A\vec{x}$ の第 i 成分は

$$p_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j=(a_{i1}\cdots a_{ij}\cdots a_{in})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}_i\ \vec{x}$$

となり，これから $A\vec{x}$ の成分表示

$$A\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\ \vec{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i\ \vec{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

を得ます．

上で見たように $m \times n$ 行列 A を n 次元ベクトル $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に左から掛けると m 次元ベクトル $A\vec{x} \in \mathbf{K}^m$ を得ます．ここで

$$F_A(\vec{x}) = A\vec{x}$$

と定めると写像

$$F_A:\ \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x} \tag{5.7}$$

を定義できます．この写像 F_A について次の定理 5.3 が成立し，これを F_A の**線型性**といいます．

定理 5.3.

$$F_A(\vec{x}+\vec{y}) = F_A(\vec{x}) + F_A(\vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n) \tag{5.8}$$

$$F_A(\lambda\vec{x}) = \lambda F_A(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbf{K}^n,\ \lambda \in \mathbf{K}) \tag{5.9}$$

Proof. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ と $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の成分表示をします．すると

$$\begin{aligned} F_A(\vec{x}+\vec{y}) &= (x_1+y_1)\vec{a}_1 + \cdots + (x_j+y_j)\vec{a}_j + \cdots + (x_n+y_n)\vec{a}_n \\ &= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n + y_1\vec{a}_1 + \cdots + y_j\vec{a}_j + \cdots + y_n\vec{a}_n \\ &= F_A(\vec{x}) + F_A(\vec{y}) \\ F_A(\lambda\vec{x}) &= (\lambda x_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\lambda x_j)\vec{a}_j + \cdots + (\lambda x_n)\vec{a}_n \\ &= \lambda(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n) = \lambda F_A(\vec{x}) \end{aligned}$$

から証明されます． □

(5.8) と (5.9) は行列の積の形では

$$A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \quad A(\lambda\vec{x}) = \lambda\,(A\vec{x}) \tag{5.10}$$

と表されます．これをまとめて得られる

$$A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda A\vec{x}+\mu A\vec{y} \tag{5.11}$$

および (5.10) を繰り返して得られる

$$A(c_1\vec{x}_1+\cdots+c_\ell\vec{x}_\ell)=c_1A\vec{x}_1+\cdots+c_\ell A\vec{x}_\ell \tag{5.12}$$

も有用です．この公式 (2) は $X=(\vec{x}_1\ \cdots\ \vec{x}_\ell)$ と $\vec{c}={}^t(c_1\ \cdots\ c_\ell)$ を用いて

$$A(X\vec{c})=(AX)\vec{c} \tag{5.13}$$

とも表現できます．これは，後に行列の積の結合法則の証明で用いることになります．

演習 5.2. (1) と (2) を証明しましょう．

5.3.2　行ベクトル × 行列

行列の左から行ベクトルを掛けることも必要になります．$n\times\ell$ 行列 X が，行ベクトル表示と列ベクトル表示

$$X=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}=(\vec{x}_1\cdots\vec{x}_k\cdots\vec{x}_\ell) \tag{5.14}$$

を持っているとします．この X に左から n 次元行ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1\ \cdots a_j\ \cdots\ a_n)$ を掛けることを

$$\boldsymbol{a}X=\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}=a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_j\boldsymbol{x}_j+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n$$

と ℓ 次元行ベクトルとして定義します（$\boldsymbol{x}_j$ が ℓ 次元行ベクトルであることに注意しましょう）．X の行ベクトルの各成分を用いて $\boldsymbol{a}X$ を計算してみると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}X &= a_1(x_{11}\cdots x_{1k}\cdots x_{1\ell})\\ &\quad +\cdots\\ &\quad +a_j(x_{j1}\cdots x_{jk}\cdots x_{j\ell})\\ &\quad +\cdots\\ &\quad +a_n(x_{n1}\cdots x_{nk}\cdots x_{n\ell})\end{aligned}$$

となります．このことから $\boldsymbol{a}X$ の第 k 成分は行ベクトル $\boldsymbol{a}$ と X の k 列 $\vec{x}_k$ の積

$$a_1x_{1k}+\cdots+a_jx_{jk}+\cdots+a_nx_{nk}=(a_1\ \cdots\ a_j\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix}x_{1k}\\ \vdots\\ x_{jk}\\ \vdots\\ x_{nk}\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}\vec{x}_k$$

として表現できます．このことから

$$\boldsymbol{a}X=(\boldsymbol{a}\vec{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}\vec{x}_k\ \cdots\ \boldsymbol{a}\vec{x}_\ell)$$

と $\boldsymbol{a}X$ の成分が表現できます．

演習 5.3. 3 次元の標準単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1=(1\ 0\ 0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0\ 1\ 0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0\ 0\ 1)$ と 3 行の行列 $X=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{e}_1X,\ \boldsymbol{e}_2X,\ \boldsymbol{e}_3X$ を計算しましょう．また $(0\ \lambda\ 0)X$, $(1\ 0\ \lambda)X$ も計算しましょう．

5.3.3　行列 × 行列

定義　さらに $m\times n$ 行列 A に対して $n\times\ell$ 行列 $X=(\vec{x}_1\cdots\vec{x}_\ell)$ を右から掛けるには，X の列ベクトルが $\vec{x}_1,\ \cdots,\ \vec{x}_k,\ \cdots,\ \vec{x}_\ell\in\mathbf{K}^n$ と ℓ 個の n 次元ベクトルであることに注意して，

$$AX=(A\vec{x}_1\ A\vec{x}_2\ \cdots A\vec{x}_\ell)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\ \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\ \vec{x}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_1\ \vec{x}_\ell\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_\ell\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{a}_m\ \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\ \vec{x}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_m\ \vec{x}_\ell\end{pmatrix}\tag{5.15}$$

と定義します．AX の列ベクトル $A\vec{x}_k$ が m 次元ベクトルであることから，AX は $m\times\ell$ 行列であることが分かります．また $X=(x_{jk})$，$P=AX=(p_{ik})$ と成分表示をすると P の (i,k) 成分は

$$p_{ik}=\boldsymbol{a}_i\ \vec{x}_k=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{jk}$$

となります．

演習 5.4. 3 列の行列 $A=\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう．

(1) $A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　**(2)** $A\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　**(3)** $A\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　**(4)** $A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

さらに行ベクトル表示 (5.6) を持つ $m \times n$ 行列 A と X の積 AX は

$$AX = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 X \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i X \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m X \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

とも表示されます．ここで

$$\boldsymbol{a}_i X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_i \vec{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i \vec{x}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_i \vec{x}_n \end{pmatrix}$$

であることに注意すると，行ベクトル表示を用いた積 AX が (5.15) にある列ベクトル表示を用いた積と一致して，定義が整合的であることが分かります．

例 5.1. 3 行の行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ に演習 *5.4* の積に現れた行列を左から掛けましょう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} A \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

この計算は，後に行列の基本変形が基本行列を掛けることに他ならないことを示すのに用います．

演習 5.5. 3 行の行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ **(2)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ **(3)** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$

演習 5.6. 行ベクトル $\boldsymbol{x} = (p\ q\ r)$ に対して ${}^t\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x} \cdot {}^t\boldsymbol{x}$ を計算しましょう.

線型写像の合成　A を $m \times n$ 行列，B を $n \times \ell$ 行列とします. (5.7) で説明しましたが，A と B はそれぞれ線型写像

$$F_B:\ \mathbf{K}^\ell \longrightarrow \mathbf{K}^n \quad \vec{c} \mapsto B\vec{c}$$
$$F_A:\ \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

を定めます. この写像 F_A と F_B の合成

$$F_A \circ F_B:\ \mathbf{K}^\ell \longrightarrow \mathbf{K}^m \quad \vec{c} \mapsto F_A(F_B(\vec{c})) = A(B\vec{c})$$

について考えます（写像の合成についてはこのすぐ後にある囲み解説を参照）. 演習 5.2 の (2) で示したことを用いて，$F_A(F_B(\vec{c})) = A(B\vec{c})$ を考えます. そのために $B = (\vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_\ell)$，$\vec{c} = {}^t(c_1 \cdots c_\ell)$ と行列 B とベクトル $\vec{c}$ の成分を定めます. すると

$$\begin{aligned} F_A(F_B(\vec{c})) &= A(B\vec{c}) = A\left(c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_\ell\vec{b}_\ell\right) \\ &= c_1A\vec{b}_1 + \cdots + c_\ell A\vec{b}_\ell = \left(A\vec{b}_1\ \cdots\ A\vec{b}_\ell\right)\vec{c} = (AB)\vec{c} = F_{AB}(\vec{c}) \end{aligned}$$

から

$$F_A \circ F_B = F_{AB}$$

を得ます. また行列の積の結合法則 に関する定理 5.4**(4)** の証明に用いる

$$A\,(B\vec{c}) = (AB)\,\vec{c} \tag{5.17}$$

も同時に示しました.

写像の合成 2 つの写像 $f:\ X \to Y$ と $g:\ Y \to Z$ があるとします. このとき

$$g \circ f:\ X \to Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

が定義できます. これを f と g の合成写像と呼びます.
さらに写像 $h:\ Z \to W$ がある場合は

$$h \circ g \circ f:\ X \to W$$

が定義できますが，これは

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

と，合成をどの順序で行っても変わりません.

5.3.4　行列の積の性質

行列の積について以下の定理 5.4 が成立します.

定理 5.4. A と B は $m \times n$ 行列, X と Y は $n \times \ell$ 行列, Q は $\ell \times g$ 行列とします. このとき次が成立します.
(1) $(A+B)X = AX + BX$
(2) $A(X+Y) = AX + AY$
(3) $A(\alpha X) = (\alpha A)\,X = \alpha(AX)$
(4)（結合法則） $(AX)\,Q = A\,(XQ)$

この定理 5.4 の証明の準備として $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$, $B = \left(\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n\right)$ と $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$(A+B)\,\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} \tag{5.18}$$

を示します. 実際

$$\begin{aligned}(A+B)\vec{x} &= \left(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n + \vec{b}_n\right)\vec{x} \\ &= x_1(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + \cdots + x_n(\vec{a}_n + \vec{b}_n) \\ &= x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n + x_1\vec{b}_1 + \cdots + x_n\vec{b}_n = A\vec{x} + B\vec{x}\end{aligned}$$

と示すことができます. また (5.10) で以下の最初の等号を示しましたが $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ と $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して

$$A(\alpha\vec{x}) = \alpha\,(A\vec{x}) = (\alpha A)\vec{x} \tag{5.19}$$

が成立することも定理 5.4 の **(3)** の証明で使います. 実際, 2 番目の等号は $\vec{x} = {}^t(x_1 \ \cdots \ x_n)$ として

$$\begin{aligned}(\alpha A)\,\vec{x} &= \left(\alpha\vec{a}_1 \quad \cdots \quad \alpha\vec{a}_n\right)\vec{x} \\ &= x_1\alpha\vec{a}_1 + \cdots + x_n\alpha\vec{a}_n = \alpha(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n) = \alpha(A\vec{x})\end{aligned}$$

と示すことができます.

Proof. **（定理 5.4 の証明）(1)** 両辺の k 列を比較します.

$$(A+B)\vec{x}_k = A\vec{x}_k + B\vec{x}_k$$

から分かります（(5.18) 参照）.
(2) 両辺の k 列を比較します.

$$A\,(\vec{x}_k + \vec{y}_k) = A\vec{x}_k + A\vec{y}_k$$

から分かります（(5.10) 参照）.

(3) 各辺の k 列を比較しますが (5.19) は

$$A(\alpha\vec{x}_k) = (\alpha A)\vec{x}_k = \alpha(A\vec{x}_k)$$

を導きます.
(4) (5.17) を用いると $\vec{q} \in \mathbf{K}^\ell$ に対して

$$A\,(X\vec{q}) = (AX)\,\vec{q}$$

が成立します. Q の t 列を $\vec{q}_t$ とすると

$$A\,(X\vec{q}_t) = (AX)\,\vec{q}_t$$

ですが，これは示すべき式の t 列が等しいことを意味します. これを用いると

$$\begin{aligned} A(XQ) &= A(X\vec{q}_1 \ \cdots \ X\vec{q}_g) = (A(X\vec{q}_1) \ \cdots \ A(X\vec{q}_g)) \\ &= ((AX)\vec{q}_1 \ \cdots \ (AX)\vec{q}_g) = (AX)(\vec{q}_1 \ \cdots \ \vec{q}_g) = (AX)Q \end{aligned}$$

と**行列の積の結合法則**が証明されます. □

この定理 5.4**(4)** にある行列の積の結合法則の意義ですが，これがあるから $m \times n$ 行列 A と $n \times \ell$ 行列 B，$\ell \times p$ 行列 C の 3 つの行列を掛けるとき

$$(AB)C = A(BC)$$

となるので，掛ける順序に結果がよらないことが分かります. これがあるので，この積を ABC と記述してもよいことが分かります.

テキスト演習問題

MSF2019 第 5 章演習 5.1 テキストの定理 5.2 の (3), (4), (5), すなわち m 行 n 列の A, B, C と $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して

$$\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)A \tag{3}$$

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A \tag{4}$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A + \alpha B \tag{5}$$

を証明しましょう.

解答 (3) $\vec{a} \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$\alpha\,(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\,\vec{a}$$

が成立することを用います. $A = (\vec{a}_1\ \ldots\ \vec{a}_n)$ と列ベクトル表示をとると

$$\begin{aligned}
\alpha\,(\beta A) &= \alpha\,(\beta\vec{a}_1\ \ldots\ \beta\vec{a}_n)\\
&= (\alpha\,(\beta\vec{a}_1)\ \ldots\ \alpha\,(\beta\vec{a}_n))\\
&= ((\alpha\beta)\vec{a}_1\ \ldots\ (\alpha\beta)\vec{a}_n)\\
&= (\alpha\beta)\,(\vec{a}_1\ \ldots\ \vec{a}_n) = (\alpha\beta)A
\end{aligned}$$

(4) $\vec{a} \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

が成立することを用います. $A = (\vec{a}_1\ \ldots\ \vec{a}_n)$ と列ベクトル表示をとると

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)A &= (\alpha+\beta)\,(\vec{a}_1\ \ldots\ \vec{a}_n)\\
&= ((\alpha+\beta)\vec{a}_1\ \ldots\ (\alpha+\beta)\vec{a}_n)\\
&= (\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_1\ \ldots\ \alpha\vec{a}_n + \beta\vec{a}_n)\\
&= (\alpha\vec{a}_1\ \ldots\ \alpha\vec{a}_n) + \left(\beta\vec{b}_1\ \ldots\ \beta\vec{a}_n\right)\\
&= \alpha\,(\vec{a}_1\ \ldots\ \vec{a}_n) + \beta\,(\vec{a}_1\ \ldots\ \vec{a}_n) = \alpha A + \beta A
\end{aligned}$$

(5) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

が成立することを用います.

$$A = (\vec{a}_1\ \ldots\ \vec{a}_n), \quad B = (\vec{b}_1\ \ldots\ \vec{b}_n)$$

と列ベクトル表示をとると

$$\begin{aligned}\alpha(A+B) &= \alpha\left(\vec{a}_1+\vec{b}_1\ \ \ldots\ \ \vec{a}_n+\vec{b}_n\right)\\ &= \left(\alpha\left(\vec{a}_1+\vec{b}_1\right)\ \ \ldots\ \ \alpha\left(\vec{a}_n+\vec{b}_n\right)\right)\\ &= \left(\alpha\vec{a}_1+\alpha\vec{b}_1\ \ \ldots\ \ \alpha\vec{a}_n+\alpha\vec{b}_n\right)\\ &= \alpha\left(\vec{a}_1\ \ \ldots\ \ \vec{a}_n\right)+\beta\left(\vec{b}_1\ \ \ldots\ \ \vec{b}_n\right)=\alpha A+\alpha B\end{aligned}$$

MSF2019 第 5 章演習 5.2 m 行 n 列の A と $\vec{x},\vec{y},\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_\ell\in\mathbf{K}^n$, $\lambda,\mu,c_1,\ldots,c_\ell$ に対して

$$A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda A\vec{x}+\mu A\vec{y} \tag{1}$$

$$A(c_1\vec{x}_1+\cdots+c_\ell\vec{x}_\ell)=c_1A\vec{x}_1+\cdots+c_\ell A\vec{x}_\ell \tag{2}$$

を証明しましょう.

解答 (1)

$$A\left(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\right)=A\left(\lambda\vec{x}\right)+A\left(\mu\vec{y}\right)=\lambda\left(A\vec{x}\right)+\mu\left(A\vec{y}\right)$$

(2) まず

$$A\left(\vec{x}_1+\ldots+\vec{x}_\ell\right)=A\vec{x}_1+\ldots+A\vec{x}_\ell$$

が成立することを帰納的に

$$\begin{aligned}A\left(\vec{x}_1+\ldots+\vec{x}_\ell\right) &= A\left(\left(\vec{x}_1+\ldots+\vec{x}_{\ell-1}\right)+\vec{x}_\ell\right)\\ &= A\left(\vec{x}_1+\ldots+\vec{x}_{\ell-1}\right)+A\vec{x}_\ell\\ &= A\vec{x}_1+\ldots+A\vec{x}_{\ell-1}+A\vec{x}_\ell\end{aligned}$$

と示します．これを用いると

$$\begin{aligned}A(c_1\vec{x}_1+\cdots+c_\ell\vec{x}_\ell) &= A\left(c_1\vec{x}_1\right)+\ldots+A\left(c_\ell\vec{x}_\ell\right)\\ &= c_A\vec{x}_1+\ldots+c_\ell A\vec{x}_\ell\end{aligned}$$

MSF2019 第 5 章演習 5.3 3 次元の標準単位ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = (1\ 0\ 0),\ \mathbf{e}_2 = (0\ 1\ 0),\ \mathbf{e}_3 = (0\ 0\ 1)$$

と 3 行の行列 $X = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathbf{e}_1 X,\ \mathbf{e}_2 X,\ \mathbf{e}_3 X$$

を計算しましょう．また

$$(0\ \lambda\ 0)X,\ (1\ 0\ \lambda)X$$

も計算しましょう.

解答

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 X &= (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \mathbf{a} \\
\mathbf{e}_2 X &= (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\
\mathbf{e}_3 X &= (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \mathbf{c} \\
(0\ \lambda\ 0)X &= (0\ \lambda\ 0)\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{b} \\
(1\ 0\ \lambda)X &= (1\ 0\ \lambda)\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}
\end{aligned}$$

MSF2019 第 5 章演習 5.4 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう.

(1) $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　**(2)** $A\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　**(4)** $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \end{pmatrix} = A$$

(2)

$$A\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}\end{pmatrix}$$

(3)

$$A\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \lambda\vec{a}+\vec{c}\end{pmatrix}$$

(4)

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}$$

MSF2019 第 5 章演習 5.5 3 行の行列 $A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}$ に対して次の積を計算しましょう.

(1) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$　**(2)** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\lambda&0&1\end{pmatrix}A$　**(3)** $\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}\\\mathbf{a}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\lambda&0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\lambda&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}\end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{pmatrix}$$

MSF2018 第 5 章演習 5.6 行ベクトル $\mathbf{x} = (p\ q\ r)$ に対して ${}^t\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ と $\mathbf{x} \cdot {}^t\mathbf{x}$ を計算しましょう.

解答

$$
{}^t\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} (p\ q\ r) = \begin{pmatrix} p^2 & pq & pr \\ pq & q^2 & qr \\ pr & qr & r^2 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{x} \cdot {}^t\mathbf{x} = (p\ q\ r) \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = p^2 + q^2 + r^2
$$

確認問題

I $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とします．$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の

$$L(\vec{a}, \vec{b}) = \{s\vec{a} + t\vec{b} \in \mathbf{R}^3;\ s, t \in \mathbf{R}\}$$

への直交射影を $\vec{w}$ とするとき

$$\vec{w} = P\vec{v}$$

を満たす 3 次正方行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう．

II $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とします．$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影を $\vec{w}$ とするとき

$$\vec{w} = Q\vec{v}$$

を満たす 3 次正方行列 $Q \in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう．

III $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．$\vec{w}$ を $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ の $\vec{a}$ 方向の直交射影とします．このとき

$$\vec{q} = \vec{v} + 2(\vec{w} - \vec{v}) = 2\vec{w} - \vec{v}$$

に対して

$$\vec{q} = Q\vec{v}$$

を満たす行列 Q を求めましょう．さらに

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

のとき Q を求めましょう．

IV $A = (\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n)$, $B = (\vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_n)$ を $m \times n$ 行列とします．このとき

$$A\vec{v} = B\vec{v} \quad (\vec{v} \in \mathbf{K}^n)$$

ならば $A = B$ となることを示しましょう．

V　次の行列の計算をしましょう．

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & \alpha & p \\ b & \beta & q \\ c & \gamma & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$

VI　$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して次の計算をしましょう．

(1) $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (2) $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (3) $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (4) $A\begin{pmatrix}1\\0\\\lambda\end{pmatrix}$ (5) $A\begin{pmatrix}0\\\lambda\\0\end{pmatrix}$

VII　$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して次の計算をしましょう．

(1) $A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (2) $A\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (3) $A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

VIII　次の掛け算をしましょう．

$\begin{pmatrix}a&d&e\\0&b&f\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&p&q\\0&y&r\\0&0&z\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x&0&0\\p&y&0\\r&q&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\d&b&0\\f&e&c\end{pmatrix}$

IX　VII を参考にして次の行列の逆行列を求めましょう．ただし，C においては $\lambda \neq 0$ とします．

$$B = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

I $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とします．$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の

$$L(\vec{a}, \vec{b}) = \{s\vec{a} + t\vec{b} \in \mathbf{R}^3;\ s, t \in \mathbf{R}\}$$

への直交射影を $\vec{w}$ とするとき

$$\vec{w} = P\vec{v}$$

を満たす 3 次正方行列 $P \in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう．

解答　まず $\vec{a}$ の方向の単位ベクトルを

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と求めます．次に $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}_1$ を

$$\vec{w}_1 = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = -\frac{2}{5}\vec{a}$$

と求めます．すると $\vec{a}$ に垂直な

$$\vec{b} - \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

の方向の単位ベクトルを

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と定めます．このとき $\vec{v} = {}^t(x\ y\ z)$ の L への直交射影は

$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= (\vec{v}, \vec{p}_1)\vec{p}_1 + (\vec{v}, \vec{p}_2)\vec{p}_2 \\
&= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-2x+y}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x+2y+5z}{30} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5x-2y+z \\ -2x+2y+2z \\ x+2y+5z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となります．従って

$$
P = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}
$$

であることが分かります．

（補足） $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の V への直交射影 $\vec{v}_0$ を行列で表すことを考えましょう．
$\vec{\beta}\beta = \frac{1}{||\vec{\alpha}||}\vec{\alpha}$ とすると $\vec{x}$ の $\vec{\beta}$ 方向の直交射影 $\vec{v}_1$ は

$$
\vec{v}_1 = \left(\vec{v}, \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta}^t \vec{\beta} \vec{v}
$$

と表せます．このことから $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の L への直交射影 $\vec{w}$ は

$$
\vec{\alpha} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= \vec{v} - \vec{\beta}^t \vec{\beta} \vec{v} \\
&= \left(I_3 - \vec{\beta}^t \vec{\beta} \right) \vec{v} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \vec{v} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \vec{v}
\end{aligned}
$$

と表されます.

　また解答にある計算を用いると

$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= \vec{p_1}\,{}^t\vec{p_1}\vec{v} + \vec{p_2}\,{}^t\vec{p_2}\vec{v} \\
&= (\vec{p_1}\,{}^t\vec{p_1} + \vec{p_2}\,{}^t\vec{p_2})\vec{v} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

としても求めることができます.

II $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とします. $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影を $\vec{w}$ とするとき

$$\vec{w} = Q\vec{v}$$

を満たす 3 次正方行列 $Q \in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう.

解答

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{v})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = \frac{1}{||\vec{a}||^2}\vec{a} \cdot {}^t\vec{a}\vec{v}$$

から

$$Q = \frac{1}{||\vec{a}||^2}\vec{a} \cdot {}^t\vec{a} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}(1\ 2\ -1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

であることが分かります.

III $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．$\vec{w}$ を $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ の $\vec{a}$ 方向の直交射影とします．このとき

$$\vec{q} = \vec{v} + 2(\vec{w} - \vec{v}) = 2\vec{w} - \vec{v}$$

に対して

$$\vec{q} = Q\vec{v}$$

を満たす行列 Q を求めましょう．さらに

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

のとき Q を求めましょう．

解答　$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とします．このとき

$$\vec{w} = \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

と計算されます．従って

$$\begin{aligned} \vec{q} &= 2\vec{w} - \vec{v} \\ &= x \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + y \cdot \frac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &\qquad -x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \\ \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ -\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} & -\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} & -\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix}$$

が分ります．さらに

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

とすると

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

となります.

IV $A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n)$, $B = (\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_n)$ を $m \times n$ 行列とします．このとき

$$A\vec{v} = B\vec{v} \quad (\vec{v} \in \mathbf{K}^n)$$

ならば $A = B$ となることを示しましょう.

解答　標準単位ベクトル $\vec{e}_j$ に対して

$$A\vec{e}_j = B\vec{e}_j \quad \text{から} \quad \vec{a}_j = \vec{b}_j$$

が従います．すべての列が等しいことを意味しますから $A = B$ であることが分かります.

V　次の行列の計算をしましょう.

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a & \alpha & p \\ b & \beta & q \\ c & \gamma & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$

解答

(1) $\begin{pmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x + 2y \\ 4x + 3y \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} ax + \alpha y + pz \\ bx + \beta y + qz \\ cx + \gamma y + rz \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} x + 2y - 3z + 4w \\ 4y - 6z + 7w \\ 2x + 4y - 6z + 8w \end{pmatrix}$

VI　$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して次の計算をしましょう.

(1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3) $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ (5) $A\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

解答　(1) $\vec{a}$　(2) $\vec{b}$　(3) $\vec{c}$　(4) $\vec{a} + \lambda\vec{c}$　(5) $\lambda\vec{b}$

VII　$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して次の計算をしましょう．

(1) $A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (2) $A\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (3) $A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解答　(1) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = A$　(2) $(\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a})$　(3) $(\vec{a}\ \lambda\vec{b}\vec{c})$

VIII　次の掛け算をしましょう．

$\begin{pmatrix}a&d&e\\0&b&f\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&p&q\\0&y&r\\0&0&z\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x&0&0\\p&y&0\\r&q&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\d&b&0\\f&e&c\end{pmatrix}$

解答

$$\begin{pmatrix}ax&ap+dy&aq+dr+ez\\0&by&br+fz\\0&0&cz\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}ax&0&0\\ap+dy&by&0\\ar+dq+fz&bq+ez&cz\end{pmatrix}$$

IX　VII を参考にして次の行列の逆行列を求めましょう．ただし，C においては $\lambda \neq 0$ とします．

$B = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}1&0&\lambda\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

注意　n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$ が正則であるとは

$$AX = XA = I_n$$

を満たす $X \in M_n(\mathbf{K})$ が存在するときです．このとき，この条件を満たす $X \in M_n(\mathbf{K})$ は一意的にです．すなわち，$X, Y \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$AX = XA = I_n,\ AY = YA = I_n\ \Rightarrow X = Y$$

が成立します．ですから，上の条件を満たす X を求めれば X が A の逆行列となります．

解答　**(1)**

$$B^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = I_3$$

から B は正則で $B^{-1} = B$ であることが分かります.

(2)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \lambda\mu\end{pmatrix}$$

であることが分かります. 従って

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} = I_3$$

であることが分かります. 従って

$$C^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$$

となります.

(3)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \mu\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda+\mu\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

であることが分かります. 従って

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\lambda\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -\lambda\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3$$

であることが分かります. 従って

$$D^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -\lambda\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

となります.

演習問題

I 実 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||A|| := a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2$$

と定めます.（A の自乗ノルムと呼びます.）
(1) $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$||A\vec{x}|| \leq ||A|| \cdot ||\vec{x}||$$

を示しましょう.
(2) $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

を示しましょう.

II $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して A^n を求めましょう.

III
(1) $P_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とします.
(i) $P_{13}(\lambda)P_{13}(\mu)$ を計算しましょう.
(ii) $P_{13}(\lambda)$ が正則であることを示して $P_{13}(\lambda)^{-1}$ を求めましょう.
(2) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とします.
(i) Q^2 を計算しましょう. **(ii)** Q が正則であることを示して Q^{-1} を求めましょう.

IV $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ とします.
(1) A が正則ならば A^{-1} も正則であることを示しましょう.
(2) A, B が正則ならば積 AB も正則であることを示しましょう.

V

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{p} \\ 0 & \mathbf{q} \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{p} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & C \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \quad b_{13} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & D \end{pmatrix}$$

に対して以下を考えましょう.

(1) AB を計算しましょう.

(2) 　$a_{11} \neq 0$ かつ C が正則であるとき、A が正則であることを示しましょう.

VI $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めましょう. ただし行基本変形による掃き出し法は用いてはいけません.

I 実 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||A|| := a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2$$

と定めます．(A の自乗ノルムと呼びます.)
(1) $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$||A\vec{x}|| \leq ||A|| \cdot ||\vec{x}||$$

を示しましょう.
(2) $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

を示しましょう.

解答　**(1)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} ||A\vec{x}|| &= ||x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2|| \leq ||x_1\vec{a}_1|| + ||x_2\vec{a}_2|| \\ &= |x_1| \cdot ||\vec{a}_1|| + |x_2| \cdot ||\vec{a}_2|| \\ &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{||\vec{a}_1||^2 + ||\vec{a}_2||^2} = ||\vec{x}|| \cdot ||A|| \end{aligned}$$

(2) $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2)$ とすると $AB = (A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2)$ が成立しますから

$$\begin{aligned} ||AB||^2 &= ||A\vec{b}_1||^2 + ||A\vec{b}_2||^2 \\ &\leq ||A||^2 \cdot ||\vec{b}_1||^2 + ||A||^2 \cdot ||\vec{b}_2||^2 \\ &= ||A||^2 \cdot (||\vec{b}_1||^2 + ||\vec{b}_2||^2) = ||A||^2 \cdot ||B||^2 \end{aligned}$$

II $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して A^n を求めましょう.

解答

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & 3\alpha^2 \\ 0 & 1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & 3\alpha^2 \\ 0 & 1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 4\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5\alpha & 10\alpha^2 \\ 0 & 1 & 5\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

から

$$
A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & n\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.20}
$$

と予想されます．上の計算の途中で A^n の $(1,3)$ 成分の α^2 の係数が

$$
0,\ 0+1=1,\ 1+2=3,\ 3+3=6,\ 6+4=10,\cdots
$$

と階差が $1,2,3,4,\ldots$ の数列となっていることに注目するとこの予想を導くことができます．

数学的帰納法によって (5.20) を証明します．すなわち (5.20) の下で

$$
A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & n\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)\alpha & \frac{(n+1)n}{2}\alpha^2 \\ 0 & 1 & (n+1)\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

から (5.20) が成立することが分かります．

解答 2

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

とすると

$$
J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = O_3
$$

が成立します．また $I_3J = JI_3 = J$ も成立します．よって 2 項定理が $(I+\alpha J)^n$ に適用できて，$n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} A^n &= (I_3+\alpha J)^n \\ &= I_3^n + {}_nC_1 I_3^{n-1}\cdot \alpha J + {}_nC_2 I_3^{n-2}\cdot \alpha^2 J^2 \\ &= I_3 + n\alpha J + \frac{n(n-1)^2}{\alpha} J^2 \end{aligned}$$

が導かれます．

参考 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ が可換とします．すなわち

$$AB = BA$$

が成立するとします．このとき

$$(A+B)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell C_k A^{\ell-k} B^k \tag{5.21}$$

を示しましょう．

証明　まず帰納法によって

$$BA^j = A^j B \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{5.22}$$

が成立することを示します．$j=1$ のときは明かで、$BA^j = A^j B$ が成立するとすると

$$BA^{j+1} = B(A^j \cdot A) = (BA^j)A = (A^jB)A = A^j(BA) = A^j(AB) = (A^jA)B = A^{j+1}B$$

から、(5.25) が成立することが分りました．

次に (5.24) が成立すると仮定します．すると

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{\ell+1} &= (A+B)(A+B)^{\ell} \\
&= (A+B)\left(\sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^k\right) \\
&= A\sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^k + B\sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^k \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell+1-k}B^k + \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k BA^{\ell-k}B^k \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell+1-k}B^k + \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^{k+1} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell+1-k}B^k + \sum_{k=0}^{\ell-1} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^{k+1} + B^{\ell+1} \\
&\quad \text{（最初の和において } j=k\text{、次の和で } j=k+1 \text{ と変数変換）} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{\ell} {}_{\ell}C_j A^{\ell+1-j}B^j + \sum_{j=1}^{\ell} {}_{\ell}C_{j-1} A^{\ell+1-j}B^j + B^{\ell+1} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{\ell} \left({}_{\ell}C_j + {}_{\ell}C_{j-1}\right) A^{\ell+1-j}B^j + B^{\ell+1} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{\ell} {}_{\ell+1}C_j A^{\ell+1-j}B^j + B^{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell+1} {}_{\ell+1}C_j A^{\ell+1-j}B^j
\end{aligned}
$$

から

$$(A+B)^{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell+1} {}_{\ell+1}C_j A^{\ell+1-j}B^j$$

を示しました．

III

(1) $P_{13}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とします.

(i) $P_{13}(\lambda)P_{13}(\mu)$ を計算しましょう.

(ii) $P_{13}(\lambda)$ が正則であることを示して $P_{13}(\lambda)^{-1}$ を求めましょう.

(2) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とします.

(i) Q^2 を計算しましょう. **(ii)** Q が正則であることを示して Q^{-1} を求めましょう.

解答 (1)

$$P_{13}(\lambda)P_{13}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{13}(\lambda+\mu)$$

となります. これを用いると $P_{13}(0) = I_3$ から

$$P_{13}(\lambda)P_{13}(-\lambda) = P_{13}(-\lambda)P_{13}(\lambda) = P_{13}(0) = I_3$$

から $P_{13}(\lambda)$ は正則で $P_{13}(\lambda)^{-1} = P_{13}(-\lambda)$ であることが分かります.

(2)

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

から Q は正則で $Q^{-1} = Q$ であることが分かります.

IV $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ とします.

(1) A が正則ならば A^{-1} も正則であることを示しましょう.

(2) A, B が正則ならば積 AB も正則であることを示しましょう.

解答 (1)

$$A^{-1}A = A^{-1} = I_n$$

から A は正則で $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ であることが分かります.

(2)

$$AB \cdot (B^{-1}A) = A(B^{-1}B)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})\cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

から AB は正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることが分かります.

V

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{p} \\ 0 & \mathbf{q} \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{p} \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix} C$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & \vec{u} & \vec{v} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & & \\ 0 & D & \end{pmatrix}$$

に対して以下を考えましょう.

(1) AB を計算しましょう.

(2) $a_{11} \neq 0$ かつ C が正則であるとき、A が正則であることを示しましょう.

解答 (1)

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + \mathbf{p}\vec{u} & a_{11}b_{13} + \mathbf{p}\vec{v} \\ 0 & & \\ 0 & CD & \end{pmatrix}$$

(2)

$$AB = I_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}b_{11} = 1,\ CD = I_2 \\ a_{11}b_{12} + \mathbf{p}\vec{u} = 0 \\ a_{11}b_{13} + \mathbf{p}\vec{v} = 0 \end{cases}$$

となることに注意すると，$a_{11} \neq 0$ で C が正則のとき

$$b_{11} = \frac{1}{a_{11}}, \quad b_{12} = -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{u}, \quad b_{13} = -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{v}, \quad D = C^{-1}$$

すなわち

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{u} & -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{v} \\ 0 & & \\ 0 & C^{-1} & \end{pmatrix}$$

と定めれば $AB = I_3$ が成立します．さらに

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{u} & -\frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}\vec{v} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C^{-1}}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot\frac{1}{a_{11}} & *_{12} & *_{13} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$C^{-1}C$}} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & *_{12} & *_{13} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{I_2}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

において

$$\begin{aligned} (*_{12}\ *_{13}) &= \frac{1}{a_{11}}(a_{12}\ a_{13}) - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}(\vec{u}\ \vec{v})C \\ &= \frac{1}{a_{11}}\mathbf{p} - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{p}C^{-1}C = \frac{1}{a_{11}}\mathbf{p} - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{p} = (0\ 0) \end{aligned}$$

となりますから $BA = I_3$ も成立します．

VI $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めましょう．ただし行基本変形による掃き出し法は用いてはいけません．

解答　$X = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $AX = I_3$ を満たす X を求めます．すなわち

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+2 & z+2y+3 \\ 0 & 1 & y-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$x + 2 = y - 2 = z + 2y + 3 = 0$$

すなわち

$$x = -2,\ y = 2, z = -7$$

であることが分かります．さらにこのとき

$$XA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

から $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$ であることが分かります．

Backup

V $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して A^n を求めましょう.

解答

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

と予想されます．実際，これを仮定すると

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立しますから，数学的帰納法により (5.23) が一般的に成立することが分かります.

（注意）

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & *_1 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 & *_2 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_2 & *_3 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 \end{pmatrix}$$

が成立することを知っていると

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & c_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と c_n を用いて書けることが分かります．ここで

$$\begin{pmatrix} 1 & c_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_n + \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に注意すると

$$c_{n+1} = c_n + \alpha$$

を得ますから，c_n は公差が α，初項が α の等差数列であることが分かります．このことから

$$c_n = n\alpha$$

を得ます.

（注意） 2 次正方行列 $A,\ B$ が $AB = BA$ を満たすとき

$$(A+B)^n = A^n + {}_nC_1 A^{n-1}B + {}_nC_2 A^{n-2}B^2 + \cdots + {}_nC_{n-2}A^2B^{n-2} + {}_nC_{n-1}AB^{n-1} + B^n$$

が成立します．これを示すには，数学的帰納法を用いますが，そのとき

$${}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1}$$

を用います（この公式の組み合わせ的な意味も大事です）．さて問題において，

$$A = I_2 + \alpha J \quad text ただし \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

において $J^2 = 0_2$ が成立しますから $n \geq 2$ のとき

$$A^n = I_2 + {}_nC_1 \cdot I_2^{n-1} \cdot \alpha J = I_2 + n\alpha J$$

を得ます.

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$ が可換とします．すなわち

$$AB = BA$$

が成立するとします．このとき

$$(A+B)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell C_k A^{\ell-k}B^k \tag{5.24}$$

を示しましょう.

証明　まず帰納法によって

$$BA^j = A^jB \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{5.25}$$

が成立することを示します．$j = 1$ のときは明かで、$BA^j = A^jB$ が成立するとすると

$$BA^{j+1} = B(A^j \cdot A) = (BA^j)A = (A^jB)A = A^j(BA) = A^j(AB) = (A^jA)B = A^{j+1}B$$

から、(5.25) が成立することが分りました.

次に (5.24) が成立すると仮定します．すると

$$\begin{aligned}
(A+B)^{\ell+1} &= (A+B)(A+B)^{\ell} \\
&= (A+B)\left(\sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^k\right) \\
&= A\sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^k + B\sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^k \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell+1-k}B^k + \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k BA^{\ell-k}B^k \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell+1-k}B^k + \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^{k+1} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell} {}_{\ell}C_k A^{\ell+1-k}B^k + \sum_{k=0}^{\ell-1} {}_{\ell}C_k A^{\ell-k}B^{k+1} + B^{\ell+1} \\
&\quad \text{（最初の和において } j=k\text{、次の和で } j=k+1 \text{ と変数変換）} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{\ell} {}_{\ell}C_j A^{\ell+1-j}B^j + \sum_{j=1}^{\ell} {}_{\ell}C_{j-1} A^{\ell+1-j}B^j + B^{\ell+1} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{\ell} \left({}_{\ell}C_j + {}_{\ell}C_{j-1}\right) A^{\ell+1-j}B^j + B^{\ell+1} \\
&= A^{\ell+1} + \sum_{j=1}^{\ell} {}_{\ell+1}C_j A^{\ell+1-j}B^j + B^{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell+1} {}_{\ell+1}C_j A^{\ell+1-j}B^j
\end{aligned}$$

から

$$(A+B)^{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell+1} {}_{\ell+1}C_j A^{\ell+1-j}B^j$$

を示しました．

V　$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行でないとします．このとき

$$\vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{x} + \vec{y} \nparallel \vec{x} - \vec{y}$$

であることを示しましょう．

解答　$\vec{x}$ と $\vec{y}$ が平行でありませんから

$$c_1\vec{x} + c_2\vec{y} = \vec{0} \ \Rightarrow \ c_1 = c_2 = 0$$

が成立します．このとき

$$f_1\vec{x}+f_2(\lambda\vec{x}+\vec{y})=\vec{0}$$

を仮定すると

$$(f_1+\lambda f_2)\vec{x}+f_2\vec{y}=\vec{0}$$

から

$$f_1+\lambda f_2=f_2=0$$

が従います．さらに $f_1=f_2=0$ となりますから，$\vec{x}\nparallel\lambda\vec{x}+\vec{y}$ が導かれます．次に

$$g_1(\vec{x}+\vec{y})+g_2(\vec{x}-\vec{y})=\vec{0}$$

を仮定すると

$$(g_1+g_2)\vec{x}+(g_1-g_2)\vec{y}=\vec{0}$$

から

$$g_1+g_2=g_1-g_2=0$$

が従います．さらに $g_1=g_2=0$ となりますから $\vec{x}+\vec{y}\nparallel\vec{x}-\vec{y}$ が導かれます．

VII　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ とします．
(1) $|\lambda I_2-B|=0$ を満たす λ を求めましょう．
(2) (1) の λ に対して

$$(\lambda I_2-A)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{0}$$

を解きましょう．
(3) A を対角化しましょう．

（解答）　**(1)**　まず

$$|\lambda I_2-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -3 & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+4)-6=(\lambda-2)(\lambda+5)$$

となりますから，$\lambda=-5,2$ が求める λ です．
(2) (i) $\lambda=2$ のとき

$$(2I_2-A)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow x=2y$$

から、解は

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\quad(y\neq 0)$$

と表されます.
(ii) $\lambda = -5$ のとき

$$(-5I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow y = -3x$$

から、解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

と表されます.
(3) ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$$

とすると

$$(\lambda I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成立しますから

$$A\vec{p}_1 = 2\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = -5\vec{p}_2$$

であることが分かります. 従って

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (2\vec{p}_1\ \ -5\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

と

$$AP = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

が導かれます. 次の一般論より P は正則行列であることが従いますから、A は

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1}$$

と対角化されます.

2 次正方行列 A と $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2 \in \mathbf{R}$ に対して

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2,\ \vec{p}_i \neq \vec{0}\ (i = 1, 2)$$

が成立し、$\alpha \neq \beta$ とします. このとき $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ は正則となります.