

線型代数演習 02-2 次正方行列の逆行列

I 次の行列の逆行列を求めましょう.

$$(1) A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (7) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

解答

$$(1) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

となります.

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \lambda \cdot 0 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となります.

$$(7) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります.

II 以下の等式を満たす 2 次正方行列 X を求めましょう.

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (ii) X \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

解答 (i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0$ から $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ が正則であることが分かる. 両辺に $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を左から掛けて

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

を得るが,

$$(\text{左辺}) = I_2 X = X$$

となるので

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

となる.

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2 \neq 0$ から $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ が正則であることが分かる. 両辺に $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ を右から掛けて

$$X \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

を得るが,

$$(\text{左辺}) = X I_2 = X$$

となるので

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -17 & 11 \end{pmatrix}$$

となります.

III 2 次正方行列 A, B が正則であるとします. このとき AB と A^{-1} が正則であることを示しましょう.

解答

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_2A^{-1} = AA^{-1} = I_2$$

$$B^{-1}A^{-1} \cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_2B = B^{-1}B = I_2$$

から AB は正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

であることが分かります.

他方

$$A^{-1}A = I_2, \quad AA^{-1} = I_2$$

から A^{-1} は正則で

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

であることが分かります.

IV 2次正方行列 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$ が

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^2)$$

を満たすとして、このとき $A = O_2$ となることを示しましょう.

Hint: 標準単位ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を \vec{x} として考えましょう.

解答

$$\vec{0} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}_1, \quad \vec{0} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a}_2$$

から

$$A = (\vec{0} \ \vec{0}) = O_2$$

が従います.