2017 年 5 月 15 日演習問題

I 以下の 2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して，Cayley-Hamilton の定理を用いて A^n を求めましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

I(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -5, 2$ である．そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 + 3A - 10I_2 = O_2$$

が成立する．この式を

$$A(A + 5I_2) = 2(A + 5I_2), \quad A(A - 2I_2) = -5(A - 2I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A + 5I_2) = 2^n(A + 5I_2) \tag{1}$$

$$A^n(A - 2I_2) = (-5)^n(A - 2I_2) \tag{2}$$

が従う．ここで (1)−(2) を考えると

$$7A^n = 2^n(A + 5I_2) - (-5)^n(A - 2I_2)$$

から

$$A^n = \frac{2^n}{7}(A + 5I_2) - \frac{(-5)^n}{7}(A - 2I_2)$$

を得る．

I(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -2, -1$ である．そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 + 3A + 2I_2 = O_2$$

が成立する．この式を

$$A(A + 2I_2) = -(A + 2I_2), \quad A(A + I_2) = -2(A + I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A + 2I_2) = (-1)^n(A + 2I_2) \tag{3}$$

$$A^n(A + I_2) = (-2)^n(A + I_2) \tag{4}$$

が従う．ここで (3)−(4) を考えると

$$A^n = (-1)^n(A + 2I_2) - (-2)^n(A + I_2)$$

を得る．

(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -5, 7$ である．そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A - 35I_2 = O_2$$

が成立する．この式を

$$A(A + 5I_2) = 7(A + 5I_2), \quad A(A - 7I_2) = -5(A - 7I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A + 5I_2) = 7^n(A + 5I_2) \tag{5}$$

$$A^n(A - 7I_2) = (-5)^n(A - 7I_2) \tag{6}$$

が従う．ここで (5)−(6) を考えると

$$12A^n = 7^n(A + 5I_2) - (-5)^n(A - 7I_2)$$

から

$$A^n = \frac{7^n}{12}(A + 5I_2) - \frac{(-5)^n}{12}(A - 7I_2)$$

を得る．

II I の行列 A に対して以下を考えましょう．

(i) A の固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ の解を求めましょう．

(ii) (i) の解の λ に対して

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ を求めましょう．

(iii) A を対角化しましょう．

(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 4) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 2$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう．

(a) $\lambda = -5$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となる．

(b) $\lambda = 2$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

　ここで

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p_1}\ A\vec{p_2}) = (-2\vec{p_1}\ \ -\vec{p_2}) = (\vec{p_1}\ \vec{p_2})\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理∗∗）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 2 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 1) + 6 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -2, -1$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう．

(a) $\lambda = -2$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

(b) $\lambda = -1$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

　ここで

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理＊＊）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 12 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1) - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 7$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう．

(a) $\lambda = -5$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

(b) $\lambda = 7$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (-5\vec{p}_1 \ 7\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理＊＊）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．