2017 年 4 月 24 日行列式確認問題

I 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by &= \alpha \quad \cdots (1) \\ cx + dy &= \beta \quad \cdots (2) \end{cases}$$

から

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

を導きましょう.

解答　x を消去するために $(1) \times c - (2) \times a$ を計算します.

$$\begin{array}{rrcrcll} & acx & + & bcy & = & \alpha c & (1) \times c \\ -) & acx & + & ady & = & \beta a & (2) \times a \\ \hline & & & (bc - ad)y & = & \alpha c - \beta a & \end{array}$$

から

$$(ad - bc)y = a\beta - c\alpha$$

となります．これは行列式を用いると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

となります.

補足

$$\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ax + by \\ c & cx + dy \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = x \cdot 0 + y \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

と 2 列の線型性と交代性を用いても導くことができます.

II 以下の行列式の値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$　**(2)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$　**(3)** $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

解答　**(1)**

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = 2 - 20 = -18$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -12 - 3 = -15$$

III 以下の行列式を計算しましょう．

(1) $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix} &= (t-2)(t-1)-(-3)(-4) = t^2-3t+2-12 \\ &= t^2-3t-10 = (t-5)(t+2) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix} &= (t-5)(t+3)-7\cdot(-1) = t^2-2t-15+7 \\ &= t^2-2t-8 = (t-4)(t+2) \end{aligned}$$

IV 以下の連立 1 次方程式を行列式を用いて解きましょう．

(1) $\begin{cases} 3x+5y &= 8 \\ 4x-2y &= 1 \end{cases}$ **(2)** $\begin{cases} 2x-3y &= -1 \\ 4x+7y &= -1 \end{cases}$

解答 (1) $D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)-5\cdot 4 = -26 \neq 0$ からクラメールの公式を用いることができる．

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{26}\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{26}(8\cdot(-2)-1\cdot 5) = -\frac{1}{26}(-21) = \frac{21}{26} \\ y &= -\frac{1}{26}\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{26}(3\cdot 1-8\cdot 4) = -\frac{1}{26}(-29) = \frac{29}{26} \end{aligned}$$

(2) $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7-(-3)\cdot 4 = 26 \neq 0$ からクラメールの公式を用いることができる．

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{26}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{26}((-1)\cdot 7-(-1)\cdot(-3)) = \frac{1}{26}(-10) = -\frac{5}{13} \\ y &= \frac{1}{26}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{26}(2\cdot(-1)-(-1)\cdot 4) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13} \end{aligned}$$

V (x, y, z) が次の連立 1 次方程式を満たすとします．

$$\begin{cases} x+2y+z &= -2 \\ 2x-y-z &= 1 \end{cases}$$

x と y を z で表しましょう．

解答

$$\begin{cases} x+2y &= -z-2 \\ 2x-y &= z+1 \end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて x, y について解くと

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} -z-2 & 2 \\ z+1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot ((-z-2)(-1) - 2(z+1)) = \frac{z}{5}$$

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -z-2 \\ 2 & z+1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot (1 \cdot (z+1) - (-z-2) \cdot 2) = -\frac{1}{5}(3z+5)$$

VI 2 平面

$$\begin{cases} x-y-2z+1 &= 0 \\ x+2y-z-1 &= 0 \end{cases}$$

の交わりの直線をパラメータ表示しましょう.

解答

$$\begin{cases} x-y &= 2z-1 \\ x+2y &= z+1 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

から

$$x = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2z-1 & -1 \\ z+1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(5z-1), \quad y = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2z-1 \\ 1 & z+1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(z-2)$$

となる．よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(5z-1) \\ -\frac{1}{3}(z-2) \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示されます.

VII クラメールの公式を用いて

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x-y+z &= -1 \end{cases}$$

を満たす (x, y, z) に対して x, y を z で表しましょう。

解答

$$\begin{cases} x+y &= z+1 \\ 2x-y &= -z-1 \end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて x, y について解くと

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} z+1 & 1 \\ -z-1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 0$$

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & z+1 \\ 2 & -z-1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(-3z-3) = z+1$$

VIII 座標空間の点 $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ が

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & (1) \\ x - 3y + 2z = -1 & (2) \end{cases}$$

を満たすとき x, y を z で表しましょう．クラメールの公式を用いましょう．

解答 (1) かつ (2) を

$$\begin{cases} x - y = 1 - z & (1)' \\ x - 3y = -1 - 2z & (2)' \end{cases}$$

と x と y の連立 1 次方程式とみなします．$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ であるので，これをクラメールの公式で解くと

$$x = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ -1-2z & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\left\{(1-z)(-3) - (-1-2z)(-1)\right\} = -\frac{1}{2}(z-4)$$
$$y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & -1-2z \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\left\{1 \cdot (-1-2z) - 1 \cdot (1-z)\right\} = \frac{1}{2}(z+2)$$

と x, y を z で表すことができます.

注意問題の条件を満たす (x, y, z) を考えます.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(z-4) \\ \frac{1}{2}(z+2) \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から，条件を満たす点の集合が方向ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で $(2, 1, 0)$ を通る直線であることが分かります．このことについて講義でさらに深めます.