

# 積分 IV

## 置換積分（その1）

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

V01b Nov 24, 2020 for CalcNT

# 置換積分 (1)

開区間  $(A, B)$  上の連続関数  $f : (A_0, B_0) \rightarrow \mathbf{R}$  とその原始関数  $F(t)$ :

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (A_0, B_0))$$

さらに連続関数  $\varphi : (a_0, b_0) \rightarrow \mathbf{R}$  が

$$\varphi(t) \in (A_0, B_0) \quad (t \in (a_0, b_0))$$

が成立するとします. このとき

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

## 置換積分 (2)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= [F(\varphi(t))]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &B = \varphi(b), A = \varphi(a) \text{ とおく} \\ &= F(B) - F(A) = \int_A^B f(x)dx\end{aligned}$$

公式

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_A^B f(x)dx$$

## 具体例(1)

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_0^1 (1+t^2)^4 t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+t^2)^4 (1+t^2)' dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 x^4 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{1}{10} (2^5 - 1) = \frac{31}{10} \end{aligned}$$

ここで対応  $\begin{array}{c|c} t & 0 \\ \hline x & 1 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$  を用いています。

## 具体例(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+t^2)'}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} [\log x]_1^2 = \frac{1}{2} \log 2\end{aligned}$$

ここで対応  $\begin{array}{c|c} t & 0 \\ \hline x & 1 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \nearrow 2 \end{array}$  を用いています。