積分 I

微分積分学の基本定理

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V02 Nov 11, 2020 for CalcNT

積分とは (1)

$$D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leqq x^2\}$$

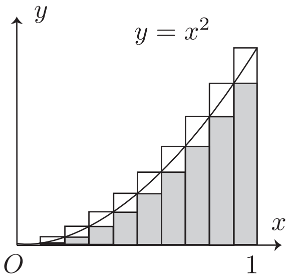
の面積を S とします．S を求めるために閉区間 $[0,1]$ を N 等分します：

$$x_0 = 0 < \frac{1}{N} < \frac{2}{N} < \cdots < \frac{N}{N} = 1 = x_N$$

において，$x_j = \frac{j}{N}$ $(j = 0, 1, \cdots, N)$ とおいて

$$S_N = \frac{1}{N}x_1^2 + \frac{1}{N}x_2^2 + \cdots + \frac{1}{N}x_N^2$$

$$s_N = \frac{1}{N}x_0^2 + \frac{1}{N}x_1^2 + \cdots + \frac{1}{N}x_{N-1}^2$$



積分とは (2)

$$s_N < S < S_N$$

が成立することが分かります．ここで

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N} j^3 = \frac{1}{N^3} \cdot \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1)$$
$$= \frac{1}{6}(1+\frac{1}{N})(2+\frac{1}{N}) \longrightarrow \frac{1}{3} \quad (N \longrightarrow +\infty)$$

$$s_N = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{j}{N}\right)^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N-1} j^3 = \frac{1}{N^3} \frac{1}{6}(N-1)N\{2(N-1)+1\}$$
$$= \frac{1}{6}(1-\frac{1}{N})(2-\frac{1}{N}) \longrightarrow \frac{1}{3} \quad (N \longrightarrow +\infty)$$

積分とは(3)

以上で

$$S = \frac{1}{3}$$

が示されました.

連続関数の積分 (1)—定義

$\mathbf{R}$ の開区間 (A, B) 上の連続関数

$$f : (A, B) \to \mathbf{R}$$

の部分閉区間 $[a, b]$ 上の積分を定義します．まず閉区間 $[a, b]$ の**分割** Δ を定めます．

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

このとき閉区間 $[x_{j-1}, x_j]$ 上の f の最大値，最小値を

$$M_j = \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x), \quad m_j = \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

を用いて分割 Δ による上積分，下積分を以下のように定義します．

$$S_\Delta := \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j-1}) \cdot M_j, \quad s_\Delta := \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j-1}) \cdot m_j$$

連続関数の積分 (2)—定義

さらに各小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ から $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ を選んで

$$\Sigma_\Delta = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \cdot f(\xi_j)$$

と定めると $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$ から

$$s_\Delta \leq \Sigma_\Delta \leq S\Delta$$

が従います.

Theorem

ある実数 $S \in \mathbf{R}$ に対して $|\Delta| := \max(x_j - x_{j-1}) \to +0$ のとき

$$S_\Delta, \Sigma_\Delta, s_\Delta \to S$$

が成立します．これが f の $[a, b]$ 上の**積分** $\int_a^b f(t)dt$

原始関数（不定積分）

開区間 (A, B) 上の関数 F が f の原始関数（不定積分）とは

$$F'(t) = f(t) \quad (t \in (A, B))$$

が成立するときです．不定積分は次の微分積分学の基本定理から存在が分かります.

微分積分学の基本定理

$t \in (A, B)$ に対して

$$F(t) := \int_a^t f(s)ds$$

と定義します.

Theorem

$F(t)$ は微分可能で

$$F'(t) = f(t)$$

が成立します.

原始関数（不定積分）と積分 (1)

Theorem

G が f の原始関数であるとき

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

まず

$$(G - F)' = f - f = 0$$

から定数 $C \in \mathbf{R}$ が存在して

$$G(t) - F(t) = C \quad (t \in (A, B)) \tag{1}$$

が成立します.

原始関数（不定積分）と積分 (2)

$t = a$ を代入して

$$G(a) - F(a) = C \tag{2}$$

次に $t = b$ を代入して

$$G(b) - F(b) = C \tag{3}$$

従って

$$F(b) = G(b) - C = G(b) - (G(a) - F(a)) = G(b) - G(a)$$

Theorem

f の原始関数 G_1, G_2 に対して，ある定数 $C \in \mathbf{R}$ が存在して

$$G_1(t) = G_2(t) + C \quad (t \in (A, B))$$