Taylor 展開

Nobuyuki TOSE

V02 July 08, 2020

Theorem

n 階微分可能な $f:(A,B)\to\mathbb{R}$ があるとします．$a\neq b$ を満たす $a,b\in(A,B)$ に対して a と b の間に ξ が存在して

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

が成立します．

e^t の Taylor 展開 (1)

Example $f(t) = e^t$ に対して

$$f'(t) = e^t,\ f''(t) = e^t,\ f^{(3)}(t) = e^t, \dots, f^{(n)}(t) = e^t$$

から

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 1$$

が成立します．Taylor の定理を用いると，$t \neq 0$ のとき 0 と t の間に c_n が存在して

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{1}{n!}e^{c_n}t^n$$

が成立します．

e^t の Taylor 展開 (2)

ここで $n \to +\infty$ とします．そのために任意の $R > 0$ を選び

$$-R < t < R$$

d であるとします．このとき

$$\left| e^t - \left(1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \right) \right| = \frac{1}{n!}e^{c_n}|t|^n \leq \frac{1}{n!}e^R R^n$$

において

$$\frac{1}{n!}R^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

が成立しますから

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots$$

が従います．

$$\frac{1}{n!}R^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

条件 $R < N$ を満たす自然数 N を一つ選びます．

$$\begin{aligned} 0 < \frac{R^n}{n!} &< \frac{R}{1}\cdot\frac{R}{2}\cdots\frac{R}{N}\cdot\frac{R}{N}\cdots\frac{R}{N} \\ &= \frac{R^N}{N!}\cdot\left(\frac{R}{N}\right)^{n-N} \end{aligned}$$

と評価できます． $0 < \frac{R}{N} < 1$ から

$$\left(\frac{R}{N}\right)^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

が成立しますから，はさみうちの定理を用いると

$$\frac{1}{n!}R^n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

Poisson 分布 (1)

非負整数に値をとる確率変数 X を以下のように定義します．

$$P(X = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

実際

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu}\cdot e^{\mu} = 1$$

から全確率が 1 となるので，確率変数が定義できます．

Poisson 分布 (2)

期待値は

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!} \\
&= e^{-\mu} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\mu} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^{\ell+1}}{\ell!} = e^{-\mu} \mu \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^\ell}{\ell!} = e^{-\mu} \mu \cdot e^{\mu} = \mu
\end{aligned}
$$

2 次のモーメントは

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \cdot P(X=k) + \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(X=k) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} + \mu = \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{(k-2)!} + \mu \\
&= \sum_{\ell=0}^{+\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^{\ell+2}}{\ell!} + \mu = e^{-\mu} \mu^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mu^\ell}{\ell!} + \mu \\
&= e^{-\mu} \mu^2 \cdot e^{\mu} + \mu = \mu^2 + \mu
\end{aligned}
$$

分散は

$$\boldsymbol{V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu}$$

$\sin t$, $\cos t$ の Taylor 展開 (1)

$f(t) = \sin t$ に対して

$f'(t) = \cos t, \quad f''(t) = -\sin t, \quad f^{(3)}(t) = -\cos t, \ f^{(4)}(t) = \sin t$

と導関数を求めていくと周期が 4 であることが分かります．これから

$$f^{(k)}(t) = \begin{cases} \cos t & k = 1, 5, \cdots \\ -\sin t & k = 2, 6, \cdots \\ -\cos t & k = 3, 7, \cdots \\ \sin t & k = 0, 4, 8, \cdots \end{cases}$$

となり

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & k = 1, 5, \cdots \\ 0 & k = 2, 6, \cdots \\ -1 & k = 3, 7, \cdots \\ 0 & k = 0, 4, 8, \cdots \end{cases}$$

が分かります．

$\sin t$, $\cos t$ の Taylor 展開 (2)

Taylor の定理を用いると $t \neq 0$ のとき

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!} + - \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}t^n$$

を満たす c_n が 0 と t の間に存在します．

$$\left| \sin t - \left(\sin t = t - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + - \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}t^n \right| \leq \frac{|t|^n}{n!}$$

において $\frac{|t|^n}{n!} \to 0 \ (n \to +\infty)$ から

$\sin t$, $\cos t$ の Taylor 展開 (3)

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + - \cdots$$

が従います．同様に

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^6 - \frac{1}{6!}t^6 + - \cdots$$