Taylor の定理 (No.2))

Nobuyuki TOSE

July 04, 2017

Theorem

$\mathbf{3}$ 階微分可能な関数 $f: (A,B) \to \mathbf{R}$ があるとします．このとき $a \neq b$ を満たす $a, b \in (A,B)$ に対して a と b の間に ξ が存在して

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(b-a)^3$$

が成立します．

Proof 関数 $F(x)$ と $G(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2, \quad G(x) = (x-a)^3$$

と定義すると、高階の導関数が

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a), & G'(x) &= 3(x-a)^2 \\ F''(x) &= f''(x) - f''(a), & G''(x) &= 3!(x-a) \\ F^{(3)}(x) &= f^{(3)}(x), & G^{(3)}(x) &= 3! \end{aligned}$$

と計算されます．このとき Moreover we have

$$F(a) = F'(a) = F''(a) = 0, \quad G(a) = G'(a) = G''(a) = 0$$

が成立します.

Proof(2)

$F(a) = G(a) = 0$ が成立しますから， Cauchy の定理が適用できて

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}$$

を満たす c_1 が a と b の間に存在します．
次に $F'(a) = G'(a) = 0$ が成立しますから， Cauchy が適用できて

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}$$

を満たす c_2 が a と c_1 の間に存在します．

Proof(3)

最後に $F''(a) = G''(a) = 0$ を用いると、 Cauchy が適用できて

$$\frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} = \frac{F''(c_2) - F''(a)}{G''(c_2) - G''(a)} = \frac{F^{(3)}(c_3)}{G^{(3)}(c_3)}$$

を満たす c_3 が a と c_2 の間に存在します.
ここで c_3 が b と a の間にあって

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F^{(3)}(c_3)}{G^{(3)}(c_3)}$$

から

$$\frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2}{(b-a)^3} = \frac{f^{(3)}(c_3)}{3!}$$

が導かれます.

Example

$f(t) = \log(1+t)$ とすると

$$f'(t) = \frac{1}{1+t},\ f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2},\ f^{(3)}(t) = \frac{2!}{(1+t)^3}$$

から

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1$$

が成立します．3 階の Taylor の定理を用いると $t(\neq 0)$ と 0 の間に c があって

$$\begin{aligned}\log(1+t) &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{2!}{(1+c)^3}t^3 \\ &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+c)^3}t^3\end{aligned}$$

が成立します．

Example(2)

ここで $-1 < c$ が成立することを用いると

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+c)^3} t^3 < 0 \quad (t < 0), \ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+c)^3} t^3 > 0 \quad (t > 0)$$

従って，不等式

$$\log(1+t) \gtrless t - \frac{1}{2} t^2 \quad (t \gtrless 0)$$

を得ます.

Theorem

n 階微分可能な $f: (A,B) \to \mathbf{R}$ があるとします．$a \neq b$ を満たす $a, b \in (A,B)$ に対して a と b の間に ξ が存在して

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(b-a)^3$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

が成立します．

Example $f(t) = e^t$ に対して

$$f'(t) = e^t,\ f''(t) = e^t,\ f^{(3)}(t) = e^t, \dots, f^{(n)}(t) = e^t$$

から

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 1$$

が成立します．Taylor の定理を用いると，a と b の間に c が存在して

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{1}{n!}e^c t^n$$

が成立します．これを用いると

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0$$

を示すことができます．

Applications(2)

実際，$t > 0$ のとき

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{1}{n!}e^c t^n \\ &> 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{1}{n!}t^n > \frac{1}{n!}t^n > \end{aligned}$$

が導かれます．これから We have also

$$e^t > \frac{1}{(n+1)!}t^{n+1} \quad (t > 0)$$

も分かります．

$$0 < \frac{t^n}{e^t} < \frac{t^n}{\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{t}$$

において $\frac{1}{t} \to 0\ (t \to +\infty)$ であることを用いると

$$\frac{t^n}{e^t} \to 0 \quad (t \to +\infty)$$