Taylor の定理

Nobuyuki TOSE

June 27, 2017

Theorem

関数 $f:\ [A,B]\to\mathbf{R}$, $g:\ [A,B]\to\mathbf{R}$ に対して

$$f \text{ と } g \text{は} [A,B] \text{ 上で連続で，} (A,B) \text{ で微分可能とする．}$$

さらに

$$f'(x) \text{と} g'(x) \text{は同時にゼロにならないとする．} \qquad (*)$$

そして

$$g(B)-g(A)\neq 0$$

とする．このとき

$$\frac{f(B)-f(A)}{g(B)-g(A)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

がある $\xi\in(A,B)$ に対して成立する．

Proof

Proof $\alpha = f(B) - f(A)$, $\beta = g(B) - g(A)$ と定義する.

$$\varphi(x) = \beta(f(x) - f(A)) - \alpha(g(x) - g(A))$$

に対して Rolle の定理が適用できるか確認しよう.

$$\varphi(A) = \beta \cdot 0 - \alpha \cdot 0 = 0$$

は明らかで，さらに

$$\varphi(B) = \beta \cdot (f(B) - f(A)) - \alpha \cdot (g(B) - g(A)) = \alpha\beta - \alpha\beta = 0$$

から $\varphi(A) = \varphi(B)$ が従う.

$$\varphi'(x) = \beta f'(x) - \alpha g'(x)$$

と計算して，Rolle の定理を適用するとある $\xi \in (A, B)$ に対して

$$0 = \varphi'(\xi) = \beta f'(\xi) - \alpha g'(\xi)$$

が成立することが分かる.

Proof(2)

従って

$$(g(B) - g(A))f'(\xi) = (f(B) - f(A))g'(\xi)$$

となる．ここで $g'(\xi) = 0$ とはならないことに注意しよう．もし $g'(\xi) = 0$ ならば

$$(g(B) - g(A))f'(\xi) = 0$$

となるが，さらに仮定 $g(B) - g(A) \neq 0$ を用いると $f'(\xi) = 0$ となる．ところがこれは $(*)$ に反する．
ようやく

$$\frac{f(B) - f(A)}{g(B) - g(A)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

が導ける．実際，$g(B) - g(A) \neq 0$ と $g'(\xi) \neq 0$ が成立するからである．

Theorem

2 階微分可能な $f:\ (A,B)\to\mathbf{R}$ が与えられているとき，$a\neq b$ を満たす $a,b\in(A,B)$ に対して a と b の間に ξ が存在して

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(b-a)^2$$

が成立します.

Proof

Proof 2 つの関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a), \quad G(x) = (x-a)^2$$

を定義します．このとき $F(a) = G(a) = 0$ が成立することに注意しましょう．このことから Cauchy の定理が適用できて

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}$$

が a と b の間のある c_1 に対して成立します．

次に F と G を微分して

$$F'(x) = f'(x) - f'(a), \quad G'(x) = 2(x-a)$$

から

$$F'(a) = 0, \quad G'(a) = 0.$$

が分かります．これがあるので Cauchy の定理が適用できて

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}$$

を満たす c_2 が c_1 と a の間に存在することが分かります．ここで

$$F''(x) = f''(x) \text{ and } G''(x) = 2$$

から

$$\frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2} = \frac{f''(c_2)}{2}$$

が従います．

Example $f(t) = e^t$ とすると

$$f'(t) = e^t,\ f''(t) = e^t,\ f^{(3)}(t) = e^t, \dots, f^{(n)}(t) = e^t$$

ここで Taylor の定理を用いると 0 と t の間に

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2} e^c t^2$$

を満たす c が存在することが分かります.

これを用いると

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

を示すことができます．$t>0$ のとき

$$e^t=1+t+\frac{1}{2}e^c t^2>1+t+\frac{1}{2}t^2>\frac{1}{2}t^2$$

から

$$0<\frac{t}{e^t}<\frac{t}{\frac{1}{2}t^2}=\frac{2}{t}$$

が従いますが，$\frac{2}{t}\to 0\ (t\to+\infty)$ が成立しますから

$$\frac{t}{e^t}\to 0\quad(t\to+\infty)$$

となります．

Applications(3)

Theorem

2 階微分可能な関数 $f:(A,B)\to\mathbf{R}$ に対して

$$f''(t)>0\quad (t\in(A,B))$$

を仮定します．このとき不等式

$$f(t)>f(a)+f'(a)(t-a)\quad (t\neq a)$$

が成立します．

Applications(4)

Proof $t, a \in (A, B)$ が $t \neq a$ を満たすとします．このとき Taylor の定理を用いると t と a の間に

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{1}{2}f''(c)(t-a)^2$$

を満たす c が存在することが分かります．ここで不等式

$$\frac{1}{2}f''(c)(t-a)^2 > 0$$

が成立することを用いると

$$f(t) > f(a) + f'(a)(t-a)$$

が従います.