補足 $(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2)$ の代数的証明

これはすでに示せる内容でした。(一般化はむしろ難しく
$\det(A) = \det({}^tA)$ が必要となります)

$\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in \mathbb{K}^3$ について $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ c_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0}$$

を使うだけです。$\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in \mathbb{K}^n$ のとき $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \iff \left(i<j \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}_j \end{vmatrix} = 0 \right)$
を用いました。

この一般化ですが $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_l \in \mathbb{K}^n$ に対して $l \geq n$ とするとき、
$P = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_l)$ とおくと

$\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_l$ が LD $\iff$ $i_1 < \cdots < i_n$ ならば
$$\begin{vmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{P}_n \end{vmatrix} = 0$$

にあたりますが証明はさらに先になります。(まだ
行列式を一般化してません)