

# 1変数連続関数の極限

①

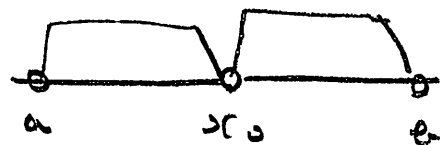
準備 (数列の極限)  $\{a_n\}$  は実数列とし、 $a \in \mathbb{R}$  に対し

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \left( n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \right)$$

$a < c < b$  とする

$$f: (a, x_0) \cup (x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$$



を考慮し、 $(I = (a, x_0) \cup (x_0, b))$  とおく

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$$

(i)  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I$

$$\left( |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \right)$$

(ii)  $\Leftrightarrow$  任意の  $\{x_n \in I, x_n \rightarrow x_0 \ (n \rightarrow +\infty)\}$  に対して

$$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow +\infty)$$

のみ成立する。 (i)  $\Rightarrow$  (ii) を示す。

$x_n \rightarrow x_0 \ (n \rightarrow +\infty)$  かつ  $\forall \delta > 0 \exists N$

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta$$

のみ成立する。  $\forall \varepsilon > 0$  (i) のみ成立するより  $n \geq N$  ならば

$$|f(x_n) - \alpha| < \varepsilon$$

0... 成' 可' 了, 従' 2

$$f(x_n) \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow +\infty)$$

0... 従' 了.

$\neg (i) \Rightarrow (ii)$   $\Rightarrow$   $(i) \Rightarrow \neg (ii)$ . 訂' 係'  $\Sigma$  (同)  $\sim$  示' 了. 可' 成' 了

Not (i)  $\Rightarrow$  Not (ii)  $\Rightarrow$  示' 了. Not (i) 也.

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in I$$

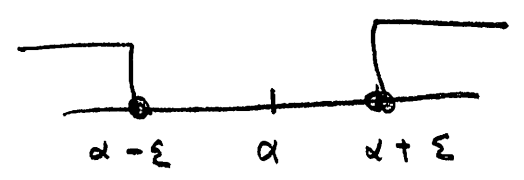
$$|x - x_0| < \delta \quad \& \> \quad |f(x) - \alpha| \geq \epsilon$$

$\Sigma$  意' 可' 了.  $\delta = \frac{1}{n}$  と' 可' 了.  $\Rightarrow \& \> \quad \exists x_n \in I$ .

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \& \> \quad |f(x_n) - \alpha| \geq \epsilon$$

と' 可' 了. 訂' 係'  $\Sigma$  の 定' 理' 可' 了.

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$



0... 成' 可' 了 0...

$$f(x_n) \leq \alpha - \epsilon \quad \text{OR} \quad \alpha + \epsilon \leq f(x_n)$$

0... 成' 可' 了.  $\Rightarrow \& \> \quad \{x_n\}$  也

$$x_n \in I, \quad x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

L' 可' 了

$$f(x_n) \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow +\infty)$$

訂' 係'  $\Sigma$  可' 了. 可' 成' 了 Not (ii)