基底の存在と延長

$V \neq \{0\}$, $V \subset \mathbb{K}^n$ を満たす V が部分空間 とします

すなわち

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V$$

が成立するとする。このとき

定理1 $V \ni \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$ が $L(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell) = V$; $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$ は LI

$V \ni \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_{\ell'}$ が $L(\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_{\ell'}) = V$; $\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_{\ell'}$ は LI

$\Rightarrow \ell = \ell'$

が成立する ここではまだ基底が存在するか示されていない

ことに注意しよう。実は

V が部分空間, W も部分空間 $V \subset W$ とするとき

1) $\dim V \leq \dim W$, 2) $\dim V = \dim W \Rightarrow V = W$

を示すとき 基底の存在が必要となります。

定理2 $V \subset \mathbb{K}^n$, $V \neq \{0\}$ のとき V には基底が存在します

証明には次の事実を使います

$\mathbb{K}^n \supset V = L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell)$, $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ は LI このとき

$\mathbb{K}^n \ni \vec{q}$, $V \not\ni \vec{q}$ ならば $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell, \vec{q}$ は LI

(証明) $c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_\ell\vec{p}_\ell + c_{\ell+1}\vec{q} = \vec{0}$. ここで $c_{\ell+1} \neq 0$ ならば

$$\vec{q} = -\frac{1}{c_{\ell+1}}(c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_\ell\vec{p}_\ell) \in V$$

となるので $\vec{q} \notin V$ に矛盾。従って $\boxed{c_{\ell+1}=0}$ このとき

$$c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_\ell \vec{p}_\ell = \vec{0}$$

が従う。$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$ はLIなので $\boxed{c_1 = \cdots = c_\ell = 0}$ よって

$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell, \vec{q}$ はLIとなる

<u>定理2の証明</u>　$V \neq \{\vec{0}\}$ なので $\underline{\exists \vec{p}_1 (\neq \vec{0}) \in V}$

となる

1a) $V = L(\vec{p}_1)$ のとき $\vec{p}_1$ がVの基底となる。

1b) $V \neq L(\vec{p}_1)$ のとき $V \supsetneq L(\vec{p}_1)$ となるので $\exists \vec{p}_2 \in V$, $\vec{p}_2 \notin L(\vec{p}_1)$

このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ はLI.

2a) $V = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ のとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ はLIとなりVの基底となる

2b) $V \neq L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ のとき $\exists \vec{p}_3 \in V$, $\vec{p}_3 \notin L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$

このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ はLI

3a) $V = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ のとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ はLIとなりVの基底となる

3b) $V \neq L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ のとき $\exists \vec{p}_4 \in V$, $\vec{p}_4 \notin L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$

このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ はLI

⋮

問　この部分を帰納法で書くべし。なぜ~~無限~~
この操作は無限に続かないか？