行列とベクトルの転置

転置が何故必要かについて説明します.

定理1 $A=(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{w}\in\mathbb{R}^m$ に対して

$$\boxed{(A\vec{v},\vec{w})=(\vec{v},{}^tA\vec{w})}$$

が成立します.

証明

$$\begin{aligned}
(\text{左}) &= (v_1\vec{a}_1+\cdots+v_n\vec{a}_n,\vec{w}) \\
&= v_1(\vec{a}_1,\vec{w})+\cdots+v_n(\vec{a}_n,\vec{w}) \\
&= \left(\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}(\vec{a}_1,\vec{w})\\ \vdots \\ (\vec{a}_n,\vec{w})\end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\vec{v},\begin{pmatrix}{}^t\vec{a}_1\vec{w}\\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n\vec{w}\end{pmatrix}\right)=\left(\vec{v},\begin{pmatrix}{}^t\vec{a}_1\\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n\end{pmatrix}\vec{w}\right) \\
&= (\vec{v},{}^tA\vec{w})=(\text{右})
\end{aligned}$$

が成立します.

定理2 $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{n,l}(\mathbb{R})$ に対して

$${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$$

証明 $\vec{v}\in\mathbb{R}^l$, $\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ とするとき

$$(AB\vec{v},\vec{w})=(\vec{v},{}^t(AB)\vec{w})$$

$$(AB\vec{v},\vec{w})=(B\vec{v},{}^tA\vec{w})=(\vec{v},{}^tB\,{}^tA\vec{w})$$

$\vec{w}_i\in\mathbb{R}^l$ に対して

一般に $\left\{\begin{array}{l}(\vec{v},\vec{w}_1)=(\vec{v},\vec{w}_2)\quad(\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^l)\\ \Rightarrow \vec{w}_1=\vec{w}_2\end{array}\right.$

が成立するので..

$${}^t(AB)\vec{w} = {}^tB\,{}^tA\vec{w}$$

$C_1, C_2 \in M_{m,l}(\mathbb{R})$ に対し

$$C_1\vec{w} = C_2\vec{w} \quad (\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^l) \Rightarrow C_1 = C_2$$

が成立するので

$${}^t(AB) = {}^tB\,A$$

が従う

注1) 定理1を使わずとも定理2は示せます。

しかも $\mathbb{K}$ でOKです

<u>定理2の別証明</u> ① $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^n$ に対し

$${}^t(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2) = \lambda\,{}^t\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2 \quad (\text{各自示す})$$

② $${}^t(c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n) = c_1\,{}^t\vec{a}_1 + \cdots + c_n\,{}^t\vec{a}_n$$

は①から導ける。

$${}^t\left((\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)\vec{c}\right) = (c_1 \cdots c_n)\begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix}$$
$$= {}^t\vec{c}\ {}^t(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$$

が成立することが分かる。$\mathbb{c} \in (\mathbb{K}^n)^*$ のとき $B = \begin{pmatrix} \mathbb{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{b}_n \end{pmatrix} \in M_{n,}$

$$\mathbb{c}B = c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_n\mathbb{b}_n$$

が成立することを思い出そう。まとめると <u>$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$</u>

$\vec{c} \in \mathbb{K}^n$ のとき

$$\boxed{{}^t(A\vec{c}) = {}^t\vec{c}\ {}^tA}$$

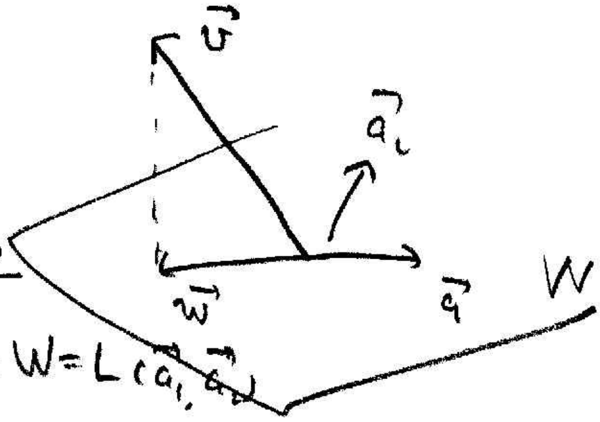
$${}^t(AB) = {}^t(A\vec{e}_1 \cdots A\vec{e}_\ell)$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t(A\vec{e}_1) \\ \vdots \\ {}^t(A\vec{e}_\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{e}_1\,{}^tA \\ \vdots \\ {}^t\vec{e}_\ell\,{}^tA \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t\vec{e}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{e}_\ell \end{pmatrix} {}^tA = {}^tB\,{}^tA$$

最初の応用　$\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^n$ とします。$\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ として $W = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ とします。このとき $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$\vec{v} - \vec{w} \perp W$



を満たす $\vec{w} \in W$、すなわち $\vec{v}$ の W への直交射影を求めます。$\vec{w} \in W = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ なので $\vec{w} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となります。

$$(\vec{v} - (\vec{a}_1\,\vec{a}_2)\vec{x},\ (\vec{a}_1\,\vec{a}_2)\vec{y}) = 0 \quad (\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^2)$$

$$\iff ({}^t(\vec{a}_1\,\vec{a}_2)(\vec{v} - (\vec{a}_1\,\vec{a}_2)\vec{x}),\ \vec{y}) = 0 \quad (\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^2)$$

$$\iff {}^t(\vec{a}_1\,\vec{a}_2)(\vec{v} - (\vec{a}_1\,\vec{a}_2)\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\iff {}^t(\vec{a}_1\,\vec{a}_2)\vec{v} = {}^t(\vec{a}_1\,\vec{a}_2)(\vec{a}_1\,\vec{a}_2)\vec{x}$$

となります。

$$^t(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)(\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \|\vec{a}_1\|^2 & (\vec{a}_2, \vec{a}_1) \\ (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & \|\vec{a}_2\|^2 \end{pmatrix}$$

となりますが（グラム行列と呼びます）

$^t(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$ とします。このとき

$$\left\| (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left((\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left({}^t(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\vec{0}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

> $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ のとき
> $\|\vec{v}\| = 0 \Longrightarrow \vec{v} = 0$

から $(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$ が従います。

$\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ から $x_1 = x_2 = 0$ となります

よって

$^t(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$ は正則

であることが分かります。よって

> $A \in M_2(\mathbb{R})$ のとき
> $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
> $\Updownarrow$
> A は正則

$$\vec{x} = \underbrace{\left({}^t(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)(\vec{a}_1\ \vec{a}_2) \right)^{-1}}\ {}^t(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\vec{v}$$

が分かります。

$$\vec{w} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\vec{x}$$

$$= (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\left({}^t(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)(\vec{a}_1\ \vec{a}_2) \right)^{-1}\ {}^t(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)\vec{v}$$

と求まります。