小テスト補足

$\vec{f}_1, \vec{f}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b})$ で条件

$$\|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\| = 1, \quad (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$$

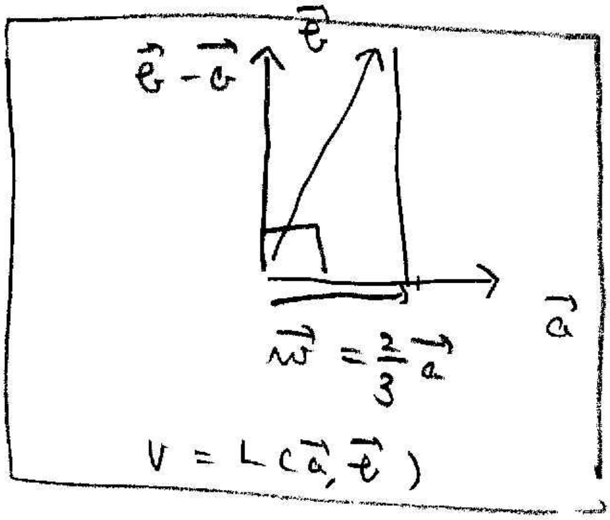
を満たすものをまず求める（$\vec{f}_1, \vec{f}_2$ を $L(\vec{a}, \vec{b})$ の正規直交基底と呼びます）$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

と求められる。$\vec{a}$ に垂直な $\vec{b} - \vec{w}$ は

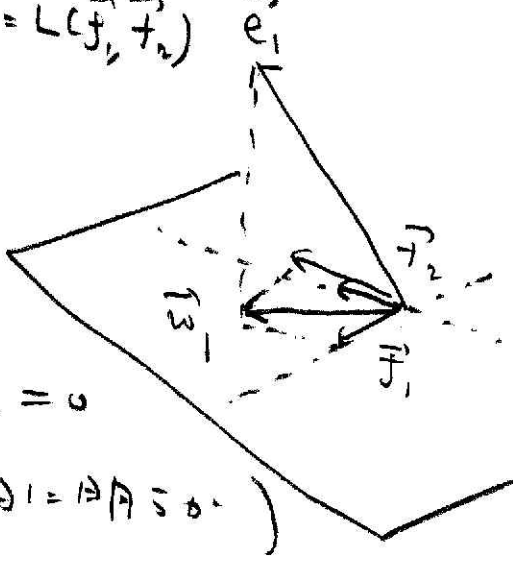
$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と求められる。$\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化すると（注）



$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となる。後で補足するが $V = L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ で



$$c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2 = \vec{0} \quad \text{とすると}$$

$$0 = (\vec{f}_1, c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2) = c_1\|\vec{f}_1\|^2 = c_1$$

から $c_2\vec{f}_2 = \vec{0}$ となるが $\vec{f}_2 \neq \vec{0}$ から $c_2 = 0$

よって $\vec{f}_1 \nparallel \vec{f}_2$ となる（これは直観的に明らか）

よって $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ は V の基底となる。$\vec{e}_1$ の V への直交射影を $\vec{w}_1 \in V$ とすると

$$\vec{w}_1 = c_1\vec{f}_1 + c_2\vec{f}_2$$

となるが

（$\vec{f}_1, \vec{f}_2$ を V の正規直交基底と呼びます。

$$(\vec{e}_1-\vec{w}_1,\ \vec{f}_1)=(\vec{e}_1-\vec{w}_1,\ \vec{f}_2)=0$$

すなわち

$$0=(\vec{e}_1-c_1\vec{f}_1-c_2\vec{f}_2,\ \vec{f}_1)=(\vec{e}_1,\vec{f}_1)-c_1\|\vec{f}_1\|^2-c_2(\vec{f}_1,\vec{f}_2)$$
$$=(\vec{e}_1,\vec{f}_1)-c_1$$

$$0=(\vec{e}_1-c_1\vec{f}_1-c_2\vec{f}_2,\ \vec{f}_2)=(\vec{e}_1,\vec{f}_2)-c_1(\vec{f}_1,\vec{f}_2)-c_2\|\vec{f}_2\|^2$$
$$=(\vec{e}_1,\vec{f}_1)-c_2$$

となるので $c_1=(\vec{e}_1,\vec{f}_1)$, $c_2=(\vec{e}_1,\vec{f}_2)$ となる。よって

$$\vec{w}_1=(\vec{e}_1,\vec{f}_1)\vec{f}_1+(\vec{e}_1,\vec{f}_2)\vec{f}_2$$
$$=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{4}{42}\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{2}{21}\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}7+8\\7+2\\-7+10\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}15\\9\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$$

とグラム行列による計算と一致した。

注) ここで $\vec{e}-\vec{w}\neq\vec{0}$ でないとまずい。$\|\vec{e}-\vec{w}\|=0$ となるからである。実は $\vec{a}\nparallel\vec{e}$ から $\vec{e}-\vec{w}\neq\vec{0}$ が従う。$\vec{e}-\vec{w}=\vec{0}$ とすると $-\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}(\vec{a},\vec{e})\vec{a}+\vec{e}=0$ から $\vec{a}\parallel\vec{e}$ となるからです。

$L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ について

一般に $V \subset W \subset \mathbb{K}^n$ において V, W が部分空間で

あるとすると i) $\dim V \leqq \dim W$, ii) $\dim V = \dim W \Rightarrow V = W$

が成立します。このことを用いると

$\dim L(\vec{a}, \vec{b}) \supset L(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, $\vec{f}_1 \nparallel \vec{f}_2$ から、

$\dim f_1 = \dim f_2 = 2$ から $L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ となります。

これを直接示します。

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$$

$$\vec{f}_2 = \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} \left(- \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} + \vec{b} \right)$$

から

$$(\vec{f}_1 \ \vec{f}_2) = (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{a}\|} & - \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} \cdot \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \\ 0 & \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} \end{pmatrix}$$

となります。 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{a}\|} & - \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} \cdot \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|} \\ 0 & \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} \end{pmatrix}$

とすると $|P| = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \frac{1}{\|\vec{b} - \vec{w}\|} \neq 0$ から P は正則で

$\vec{v} \in L(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ とすると

$$\vec{v} = s \vec{f}_1 + t \vec{f}_2 = (\vec{f}_1 \vec{f}_2) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = (\vec{a} \vec{b}) P \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

で $\forall \vec{g} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ に対して

$$\vec{g} = (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{f}_1 \vec{f}_2) P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$$ が

$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で成立する。

問

$$L(\vec{a}, \vec{e}, \vec{e_1}) = L(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$$

$$\|\vec{f_j}\| = 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$(\vec{f_i}, \vec{f_j}) = 0 \quad (i \neq j)$$

を満たす $\vec{f_j}$ を求めよ