

SLIN2025L03 06/19 小テスト問題

年 組	学生証番号		氏名	
-----	-------	--	----	--

6 本の $\mathbf{R}^4$ のベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

に対して以下の問いに答えましょう.

(1) $(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c} \ \vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r})$ を行基本変形によって狭義の階段行列にしましょう (pivot が 1 で, その上下がすべて 0 である階段行列です). S1 の講義で教えたアルゴリズムに従い, 用いた変形を講義で定めた記法によって明記すること.

(2) (1) の計算結果を用いて $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立であることを示しましょう.

(3) (1) の計算結果を用いて $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ であることを示しましょう.

(4) (1) の行基本変形の計算結果からさらに行基本変形を続けて (i) $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が線型独立であることを示しましょう. (ii) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ の線型結合 (1 次和) で表しましょう. ここでは講義のアルゴリズムを用いなくてもよしとします. ただし用いた変形を (1) と同様に明記すること.

SLIN2025L03 06/19 小テスト解答

(1)

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{2r+=1r \times (-2), 4r+=1r \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{2r \times = \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1r+=2r \times (-1), 3r+=2r \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{3r \times = (-\frac{3}{4})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1r+=3r \times (-\frac{2}{3}), 2r+=3r \times (-\frac{1}{3}), 4r+=3r \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(2) (1) から $(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$ であることが分かります。これから

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

が従います。よって $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は LI であることが分かります。

$$(3) (1) \text{ で求めた狭義の階段行列を } (\vec{a}_2 \ \vec{b}_2 \ \vec{c}_2 \ \vec{p}_2 \ \vec{q}_2 \ \vec{r}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ とします。}$$

$$\vec{p}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{a}_2 + \vec{b}_2 + \vec{c}_2 \quad \text{から} \quad \vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{q}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \vec{a}_2 - 2\vec{b}_2 - \vec{c}_2 \quad \text{から} \quad \vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \vec{a}_2 - 3\vec{b}_2 - 2\vec{c}_2 \quad \text{から} \quad \vec{r} = \vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{c}$$

であることが分かります。これは

$$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

を意味します。

注意 この結果をまとめると

$$(\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r}) = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (\#)$$

と表現できます。以下のために $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ と定めます。(4) $(\vec{a}_2 \ \vec{b}_2 \ \vec{c}_2 \ \vec{p}_2 \ \vec{q}_2 \ \vec{r}_2)$ を $(\vec{a}_3 \ \vec{b}_3 \ \vec{c}_3 \ \vec{e}_1 \ \vec{e}_3 \ \vec{e}_3)$ に行基本変形します。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2r+=1r \times (-1), 3r+=1r \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{2r+=1r \times (-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1r+=2r \times (-1), 3r+=2r \times 2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{1r+=3r, 2r+=3r \times (-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\vec{a}_3 \ \vec{b}_3 \ \vec{c}_3 \ \vec{p}_3 \ \vec{q}_3 \ \vec{r}_3)
\end{aligned}$$

Cont.

と行基本変形できます. 以上の変形から

$$\begin{aligned}\vec{a}_3 &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{p}_3 - \vec{q}_3 + \vec{r}_3 \quad \text{から} \quad \vec{a} = \vec{p} - \vec{q} + \vec{r} \\ \vec{q}_3 &= \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = \vec{a}_3 - 3\vec{b}_3 + 2\vec{c}_3 \quad \text{から} \quad \vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} \\ \vec{r}_3 &= -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 = -\vec{p}_3 + 4\vec{b}_3 - 3\vec{c}_3 \quad \text{から} \quad \vec{r} = -\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c}\end{aligned}$$

が導けます. 従って

$$\vec{a} = \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}, \quad \vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}, \quad \vec{r} = -\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c} \quad (\$)$$

であることが分かります. 他方 (1) と (3) の行基本変形から

$$(\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r}) \rightarrow \cdots \rightarrow (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$$

から

$$\xi\vec{p} + \eta\vec{q} + \zeta\vec{r} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \xi\vec{e}_1 + \eta\vec{e}_2 + \zeta\vec{e}_3 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \eta = \zeta = 0$$

が従います. よって $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ は LI であることが分かります.

注意 (\$) から

$$(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = (\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (\&)$$

と表現できます. 以下のために $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ と定めます. (4) における行基本変形の $\mathbf{0}$ が続く 4 行は無視してよく 1 行から 3 行を抜き出すと

$$(I_3|S) \rightarrow \cdots \rightarrow (T|I_3)$$

従って 1,2,3 列と 3,4,5 列を交換して

$$(S|I_3) \rightarrow \cdots \rightarrow (I_3|T)$$

が導けます. これは S が正則で $S^{-1} = T$ であることを意味します. 他方 $(I_3|S) \rightarrow \cdots \rightarrow (T|I_3)$ を逆にたどった行基本変形は

$$(T|I_3) \rightarrow \cdots \rightarrow (I_3|S)$$

となり T が正則で $T^{-1} = S$ であることを意味します. これは次の一般論から導けることにも注意してください.

定理 0.1 $P \in M_n(\mathbf{K})$ が正則ならば P の逆行列 P^{-1} も正則で $(P^{-1})^{-1} = P$

補足問題 行列の正則性の定義を用いてこの定理を示しましょう.

(#) の両辺に右から T を掛けると

$$(\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r})T = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})ST = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})I_3 = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$$

が従いますが, これは (&) に他なりません.

まだ講義では完全に証明していませんが, 3 次正方行列の正則性に関しては次の定理 0.2 が成立します.

定理 0.2 $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して以下の条件は同値です.

- (I) A は正則
- (ii) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- (ii)' $A \rightarrow \cdots \rightarrow I_3$ と行基本変形可能.
- (iii) $\det(A) \neq 0$

補足（部分空間の基底変換と座標変換）一般に $V \subset \mathbf{K}^n$ は条件

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$$

を満たすとき $\mathbf{K}^n$ の部分空間と呼びます。 $V = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ と定めると V は $\mathbf{R}^4$ の部分空間です。

一般に $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell$ が条件

- (i) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell$ は LI
- (ii) $V = L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell)$

を満たすとき $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell$ を部分空間 V の基底と呼びます。 $V = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ と定めると、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は V の基底となります。

次に

$$L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) \subset L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

を示します。 任意の $\vec{v} \in L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ は

$$\vec{v} = \xi \vec{p} + \eta \vec{q} + \zeta \vec{r} = (\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

と表せます。 (#) から

$$\vec{v} = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad \text{ただし} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

となりますから $L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) \subset L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ であることが分かります。 逆に

$$L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) \supset L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

も成立します。 実際、 任意の $\vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ は

$$\vec{v} = x \vec{p} + y \vec{q} + z \vec{r} = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表せます。 (&) から

$$\vec{v} = (\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r}) T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad \text{ただし} \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となりますから $L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) \supset L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ であることが従います。 以上で

$$L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

を証明しました。 実は $L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) \subset L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ を示した後で別の論法によって $L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ を示すことができます。

$$L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) \subsetneq L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

とします。 このとき $\exists \vec{s} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ が $\vec{s} \notin L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ を満たします。 この状況で $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ は LI となります。 実際

$$c_1 \vec{p} + c_2 \vec{q} + c_3 \vec{r} + c_4 \vec{s} = \vec{0}$$

とします。 ここで $c_4 \neq 0$ とすると

$$\vec{s} = -\frac{1}{c_4}(c_1 \vec{p} + c_2 \vec{q} + c_3 \vec{r}) \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

となってしまう矛盾が生じます。よって $c_4 = 0$ であることが分かります。このとき

$$c_1 \vec{p} + c_2 \vec{q} + c_3 \vec{r} = \vec{0}$$

となりますが、 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ は LI ですから $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が従うからです。(以上で背理法の仮定の下で $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ が LI となることを導きました。) これから以下のように矛盾が導けます。 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s} \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ なので

$$(\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r} \ \vec{s}) = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表現できます。右辺に出てくる 3 行 4 列の $D := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}$ は各列が $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ それぞれの座標となります (座標については後に説明します)。 D が定める斉次方程式には非自明な解 $\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在します:

$$D \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

(1) の両辺に右からこの非自明解を掛けると

$$(\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r} \ \vec{s}) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) D \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \vec{0} = \vec{0}$$

から $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ が LD であることになり矛盾が生じます。以上で背理法の仮定が否定されて $L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ となることが証明されました。

以上で

- (i) $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ は LI.
- (ii) $V = L(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$

が成立ことを示しましたから、 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ も V の基底であることが分かります。

すでに 2 次元部分空間の場合に基底と基底が定める座標について学んでいますが、3 次元の場合について考えます。写像

$$F_1 : \mathbf{R}^3 \rightarrow V \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LI なので単射であることが分かります。 F_1 あるいは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ のことを基底 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が定める座標と呼びます。 F_1 が単射であるということの意味を考えましょう。

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

となりますから $\vec{v} \in V$ に対して一意的に座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が定まることが分かります。

同様に、写像

$$F_2 : \mathbf{R}^3 \rightarrow V \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto \xi\vec{p} + \eta\vec{q} + \zeta\vec{r}$$

は $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が LI なので単射であることが分かります。 F_2 あるいは $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ のことを基底 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が定める座標と呼びます。

2 系統の座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ の関係について考えます。 $\vec{v} \in V$ のとき

$$\vec{v} = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ が (一意的に) 存在します。このとき

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{および} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

が成立することはすでに示してあります。この 2 つの等式は S と T がお互いに逆行列であることから、相互に導くことも分かります。

The End.