5

2 平面の交わり (2)

2 平面の交わり

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & (2) \end{cases}$$

を考えます．(1) と (2) の法線ベクトルについて

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が成立するとします．さらに

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

を仮定します．

注) $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 又は $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ でも同様．

2 平面の交わり (3)

クラメールの公式を用いて

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1z + \alpha_1 & b_1 \\ -c_2z + \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z + \alpha_1 \\ a_2 & -c_2z + \alpha_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

が従います．さらに $t = \frac{z}{D}$ とパラメータを定めると，上の結果をベクトルで表すことによって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と 2 直線の交わりは直線としてパラメータ表示される．

P.13 11の線形性

- $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} \lambda a_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ （転置の行列式）

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$ （交代性）

$$x = -\frac{Z}{D} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = -\frac{Z}{D} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

2 平面の交わり (4)—ベクトル積

ク

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$ ← 定義は $\mathbb{C}^3$ 中でもできる.

を $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ の外積（ベクトル積）と呼びます．このとき　<u>$\mathbb{R}^3$ 中.</u>

$$\vec{p}_1 \perp \vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \quad \vec{p}_2 \perp \vec{p}_1 \times \vec{p}_2$$

以上で幾何学的にこれは示しましたが，代数的にも示せます．

（3次行列式の性質を用います → S_2）

ベクトル積の性質

復習

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

これから

$$\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0}$$

$$\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0}$$

以上は代数的に示していて $\mathbf{C}^3$ 中でも大丈夫です．後にベクトル積の幾何学的な意味を考えるときに，$\mathbf{R}^3$ の場合に幾何的な証明を与えます．

P23 11の線形性

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & \lambda b_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

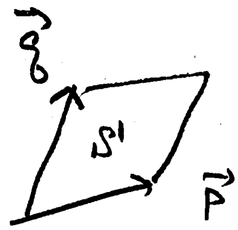
演習

$$(\vec{p}_1 + \vec{q}_1) \times \vec{p}_2 = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 + \vec{q}_1 \times \vec{p}_2$$

$$(\lambda \vec{p}_1) \times \vec{p}_2 = \lambda (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)$$

$$\vec{p}_1 \times (\vec{p}_2 + \vec{q}_2) = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 + \vec{p}_1 \times \vec{q}_2$$

$$\vec{p}_1 \times (\lambda \vec{p}_2) = \lambda (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)$$



演習

$\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$ が $\vec{p} \neq \vec{0}, \vec{q} \neq \vec{0}$ とします

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ が定める平行四辺形の面積が

$$\|\vec{p} \times \vec{q}\|^2 = S^2$$

を満たすことを示しましょう（$\|\cdot\|$ はベクトルの大きさ）