「連立1次方程式の同値変形」演習問題解答 ①

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^4$ が

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{a} \\ 2\vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{b} \\ 3\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{c} \end{cases}$$

を満たす. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表しましょう.

(解答) 「アルゴリズム」に従って変形してみる

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{a} & \text{(i)} \\ 2\vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{b} & \text{(ii)} \\ 3\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{c} & \text{(iii)} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{a} & \text{(i)}_1 := \text{(i)} \\ -3\vec{y} = -2\vec{a} + \vec{b} & \text{(ii)}_1 := \text{(ii)} + \text{(i)} \times (-2) \\ -2\vec{y} - 4\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & \text{(iii)}_1 := \text{(iii)} + \text{(i)} \times (-3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{a} & \text{(i)}_2 := \text{(i)}_1 \\ \vec{y} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} & \text{(ii)}_2 := \text{(ii)}_1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ -2\vec{y} - 4\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & \text{(iii)}_2 := \text{(iii)}_1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} & \text{(i)}_3 := \text{(i)}_2 + \text{(ii)}_2 \times (-1) \\ \vec{y} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} & \text{(ii)}_3 := \text{(ii)}_2 \\ -4\vec{z} = -\frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c} & \text{(iii)}_3 := \text{(iii)}_2 + \text{(ii)}_2 \times 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} & \text{(i)}_4 := \text{(i)}_3 \\ \vec{y} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} & \text{(ii)}_4 := \text{(ii)}_3 \\ \vec{z} = \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} & \text{(iii)}_4 := \text{(iii)}_3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

②

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \vec{x} = -\frac{1}{12}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} & (i)_5 := (i)_4 + (iii)_4 \times (-1) \\ \vec{y} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} & (ii)_5 := (ii)_4 \\ \vec{z} = \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} & (iii)_5 := (iii)_4 \end{cases}$$

係数行列では以下の変形になります.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2r += 1r \times (-2) \\ 3r += 2r \times (-3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2r \times = (-\frac{1}{3})]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{1r += 2r \times (-1) \\ 3r += 2r \times 2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3r \times = (-\frac{1}{4})]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1r += 3r \times (-1)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

基本変形と 行基本変形

I $(i \neq j)$

$$\vdots \quad i \quad \vdots \quad j \quad \vdots \longrightarrow \vdots \quad i \quad \vdots \quad j' := j + i \times \lambda$$

j行にi行のλ倍を加える

$jr \mathrel{+}= ir \times \lambda$

II $\lambda \neq 0$

$$\vdots \quad i \quad \vdots \longrightarrow i' = i \times \lambda$$

i行をλ倍

$ir \times= \lambda$

III $i \neq j$

$$\vdots \quad i \quad \vdots \quad j \quad \vdots \longrightarrow \vdots \quad i' := j \quad \vdots \quad j' := \bigcirc \quad \vdots$$

i行とj行を交換

$ir \longleftrightarrow jr$

4

LA_L01_0410 連立方程式の基本変形　演習問題解答 sympyを使う

Python3 上のSympy を用いると簡単に答えが出ます。

```
>>> from sympy import *
>>> A=Matrix([[1,1,1,1,0,0],[2,-1,2,0,1,0],[3,1,-1,0,0,1]])
>>> A
Matrix([
[1,  1,  1, 1, 0, 0],
[2, -1,  2, 0, 1, 0],
[3,  1, -1, 0, 0, 1]])
>>> A.rref()
(Matrix([
[1, 0, 0, -1/12,  1/6,  1/4],
[0, 1, 0,   2/3, -1/3,    0],
[0, 0, 1,  5/12,  1/6, -1/4]]), (0, 1, 2))
```