連立方程式の同値変形

例えば

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & \cdots ① \\ cx + dy = \beta & \cdots ② \end{cases}$$

と考える. ① かつ ② から

$$①' := p \times ① + q \times ②$$
$$②' := r \times ① + s \times ②$$

と導くが ① かつ ② と ①' かつ ②' は同値なのか?

$$\boxed{ps - qr \neq 0 \text{ ならば } ① \text{かつ} ② \equiv ①' \text{かつ} ②'}$$

が成立する. これを示そう.

$$①'' := A \times ①' + B \times ②' = (Ap + Br)① + (Aq + Bs)②$$
$$②'' := C \times ①' + D \times ②' = (Cp + Dr)① + (Cq + Ds)②$$

と定める. ここで $A = s$, $B = -q$; $C = -r$, $D = p$

を選ぶと

$$①'' = (ps - qr) \times ①$$
$$②'' = (ps - qr) \times ②$$

となる. $ps - qr \neq 0$ を前提としているので ①'', ②'' に $\dfrac{1}{ps-qr}$ 倍して

$$①''' := \frac{1}{ps-qr} \times ①'' = ①$$
$$②''' := \frac{1}{ps-qr} \times ②'' = ②$$

となる.

例えば

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & ① \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{b} & ② \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{c} & ③ \end{cases}$$

を $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が満たすとしよう.

①' := ①

②' := (-2) × ① + ②　　$3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b}$

③' := (-3) × ① + ②　　$\vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c}$

とすると

① かつ ② かつ ③ ≡ ①' かつ ②' かつ ③'

となる. 前のページの結果から 例えば

① かつ ② ≡ ①' かつ ②' , ① かつ ③ ≡ ①' かつ ③'

が言えるからである. (前のページの基本変形 Ⓘ を用いている.)

さらに

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & ①' \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} & ②' \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & ③' \end{cases}$$

において

①'' = ①', ②'' = ③', ③'' = ②'

とすると ①' かつ ②' かつ ③' は

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & ①'' \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{b} \end{cases}$$

と同値である. 以下は この資料の4ページを参照すること.

基本変形

Ⅰ $i \neq j$

$$\cdots\ i\ \cdots\ j$$

$\downarrow$ $\uparrow$ 逆は j' に $(-\lambda)\,i$ を加える.

$$\cdots\ i\ \cdots\ j + \lambda i = j'$$

Ⅱ $\lambda \neq 0$

$$\cdots\ i\ \cdots$$

$\downarrow$ $\uparrow$ 逆は i' を $\frac{1}{\lambda}$ 倍

$$\cdots\ \underset{\displaystyle i'}{\underset{\parallel}{\lambda i}}\ \cdots$$

Ⅲ $i \neq j$

$$\cdots\ i\ \cdots\ j$$

$\downarrow$ $\uparrow$ i' と j' を交換.

$$\cdots\ \underset{\displaystyle i'}{\underset{\parallel}{j}}\ \cdots\ \underset{\displaystyle j'}{\underset{\parallel}{i}}\ \cdots$$

$i \neq j$ $\qquad \cdots\ i\ \cdots\ j$ $\qquad$ $ad - bc \neq 0$ のとき, ※は同値な変形

$\downarrow$ ※

$$\cdots\ i' := a \times i + b \times j\ \cdots\ j' := c \times i + d \times j$$

$\downarrow$

$$\cdots\ \underset{\displaystyle (ax+cy)\,i + (bx+dy)\,j}{\underset{\parallel}{x\,i' + y\,j'}}\ \cdots\ z\,i' + w\,j' = (az+cw)\,i' + (bz+dw)\,j'$$

演習 1.08（教科書 5p） $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ が関係式

意味はない.

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1) \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{b} & (2) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{c} & (3) \end{cases}$$

満たしているとします．このとき $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表しましょう．

解答

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \vec{x} & - & \vec{y} & + & 2\vec{z} & = & \vec{a} & & & & & (1) \\ 2\vec{x} & + & \vec{y} & - & \vec{z} & = & & & \vec{b} & & & (2) \\ 3\vec{x} & - & 2\vec{y} & + & \vec{z} & = & & & & & \vec{c} & (3) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} \vec{x} & - & \vec{y} & + & 2\vec{z} & = & \vec{a} & & & & & (1)_1 = (1) \\ & & 3\vec{y} & - & 5\vec{z} & = & -2\vec{a} & + & \vec{b} & & & (2)_1 = (2) - 2 \times (1) \\ & & \vec{y} & - & 5\vec{z} & = & -3\vec{a} & & & + & \vec{c} & (3)_1 = (3) - 3 \times (1) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} \vec{x} & - & \vec{y} & + & 2\vec{z} & = & \vec{a} & & & & & (1)_2 = (1)_1 \\ & & \vec{y} & - & 5\vec{z} & = & -3\vec{a} & & & + & \vec{c} & (2)_2 = (3)_1 \\ & & 3\vec{y} & - & 5\vec{z} & = & -2\vec{a} & + & \vec{b} & & & (3)_2 = (2)_1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} \vec{x} & & & - & 3\vec{z} & = & -2\vec{a} & & & + & \vec{c} & (1)_3 = (1)_2 + (2)_2 \\ & & \vec{y} & - & 5\vec{z} & = & -3\vec{a} & & & + & \vec{c} & (2)_3 = (2)_2 \\ & & & & 10\vec{z} & = & 7\vec{a} & + & \vec{b} & - & 3\vec{c} & (3)_3 = (3)_2 - 3 \times (2)_2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} \vec{x} & & & - & 3\vec{z} & = & -2\vec{a} & & & + & \vec{c} & (1)_4 = (1)_3 \\ & & \vec{y} & - & 5\vec{z} & = & -3\vec{a} & & & + & \vec{c} & (2)_4 = (2)_3 \\ & & & & \vec{z} & = & \frac{7}{10}\vec{a} & + & \frac{1}{10}\vec{b} & - & \frac{3}{10}\vec{c} & (3)_4 = \frac{1}{10} \times (3)_3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} \vec{x} & & & & & = & \frac{1}{10}\vec{a} & + & \frac{3}{10}\vec{b} & + & \frac{1}{10}\vec{c} & (1)_5 = (1)_4 + 3 \times (3)_4 \\ & & \vec{y} & & & = & \frac{1}{2}\vec{a} & + & \frac{1}{2}\vec{b} & - & \frac{1}{2}\vec{c} & (2)_5 = (2)_4 + 5 \times (3)_4 \\ & & & & \vec{z} & = & \frac{7}{10}\vec{a} & + & \frac{1}{10}\vec{b} & - & \frac{3}{10}\vec{c} & (3)_5 = (3)_4 \end{array}\right.$$

この演習問題の補足を L02_0417 で行なう予定です.

また以下の演習問題 1.08b を講義後解いてみましょう.

演習 1.08b

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{a} \\ 2\vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{b} \\ 3x + \vec{y} - \vec{z} = \vec{c} \end{cases}$$

について, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表わしましょう.