# 双対座標について (Ver. 2)



$V$を有限次元の線型空間とします．$V \subset \mathbb{K}^n$として$V$が部分空間である場合で十分です．あるいは，とりあえず$V = \mathbb{K}^n$としても構いません．

このとき

$$V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) = \{T : V \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ T\text{は線型}\}$$

を$V$の<u>双対空間</u>と呼びます．

$T_1, T_2 \in V^*$に対して

$$(\lambda T_1 + \mu T_2)(\vec{v}) = \lambda T_1(\vec{v}) + \mu T_2(\vec{v})$$

とすると$\lambda T_1 + \mu T_2 \in V^*$となります．このように$V^*$は線型空間となります．

<u>$V = \mathbb{K}^n$のとき</u>

$$T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

が線型のとき$\exists\, \mathbf{a} = (a_1 \cdots a_n)$ 1行ベクトルが存在して

$$F_{\mathbf{a}} = T$$

となります．従って この場合$V = \mathbb{K}^n$のときは

$$V^* = \{(a_1 \cdots a_n)\ ;\ a_j \in \mathbb{K}\}$$

と行ベクトル全体となります．

一般論に戻って$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_\ell$を$V$の基底とするとき

$$\mathbb{e}^j : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\vec{v} = x^1\vec{e}_1 + \cdots + x^\ell \vec{e}_\ell \longmapsto x_j$$

で$\mathbb{e}^j \in V^*$が定義できます．

このとき、

$$\mathbb{e}^j(\vec{e}_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

であることが分かります。$\mathbb{e}^1, \cdots, \mathbb{e}^l$ を $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_l$ の双対基底と呼びます。基底であることを説明しましょう。

① $T = T(\vec{e}_1)\mathbb{e}^1 + \cdots + T(\vec{e}_l)\mathbb{e}^l$

右辺を $T_0$ とします。

$$T_0(\vec{e}_i) = T(\vec{e}_1)\mathbb{e}^1(\vec{e}_i) + \cdots + T(\vec{e}_l)\mathbb{e}^l(\vec{e}_i) = T(\vec{e}_i)$$

ここで $\mathbb{e}^j(\vec{e}_i) = \delta^j_i$ であることを用いました。

$$\vec{v} = x^1\vec{e}_1 + \cdots + x^l\vec{e}_l \in V$$

に対するTの値は

$$\begin{aligned} T(\vec{v}) &= x^1 T(\vec{e}_1) + \cdots + x^l T(\vec{e}_l) \\ &= x^1 T_0(\vec{e}_1) + \cdots + x^l T(\vec{e}_l) \\ &= T_0(x^1\vec{e}_1 + \cdots + x^l\vec{e}_l) = T_0(\vec{v}) \end{aligned}$$

となり $T = T_0$ から

$$T = T(\vec{e}_1)\mathbb{e}^1 + \cdots + T(\vec{e}_l)\mathbb{e}^l$$

であることが分かります。

② $\mathbb{e}^1, \cdots, \mathbb{e}^l$ は LI

$$c_1\mathbb{e}^1 + \cdots + c_l\mathbb{e}^l = \mathbb{0}$$

とします。$\mathbb{e}^i(\vec{e}_k) = \delta^i_k$ に注意すると

$$\begin{aligned} 0 &= (c_1\mathbb{e}^1 + \cdots + c_l\mathbb{e}^l)(\vec{e}_k) = c_1\mathbb{e}^1(\vec{e}_k) + \cdots + c_l\mathbb{e}^l(\vec{e}_k) \\ &= \sum_i c_i \mathbb{e}^i(\vec{e}_k) = \sum_i c_i \delta^i_k = c_k \end{aligned}$$

から $c_1 = \cdots = c_k = 0$ が従います.

**双対座標** $\vec{v} \in V$ に対して

$$\vec{v} = x^1 \vec{e}_1 + \cdots + x^\ell \vec{e}_\ell = x^i \vec{e}_i$$ (ここで Einstein Rule を使っています)

とするとき $x^i$ を ~~共変座標~~反変座標と呼びます. 他方 $T \in V^*$ のとき,

$$T = \xi_1 e^1 + \cdots + \xi_\ell e^\ell \underset{\uparrow}{=} \xi_i e^i$$ (↑は Einstein Rule)

とするとき $\xi_i$ を双対座標(~~反変座標~~共変座標)と呼びます.

**座標変換** $V$ の別の基底 $\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_\ell$ があるとします.

$$(*) \qquad \vec{f}_j = \sum_i \alpha^i_j \vec{e}_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ER}}}{=} \alpha^i_j \vec{e}_i = \alpha^1_j \vec{e}_1 + \cdots + \alpha^\ell_j \vec{e}_\ell$$

と表現できます.

$$\alpha = (\alpha^i_j) = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \cdots & \alpha^1_\ell \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^\ell_1 & \cdots & \alpha^\ell_\ell \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

は正則で $(*)$ は

$$(\vec{f}_1 \cdots \vec{f}_\ell) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell) \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \cdots & \alpha^1_\ell \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^\ell_1 & \cdots & \alpha^\ell_\ell \end{pmatrix}$$

と表現できます.

---

一般に 正方行列 $\alpha \in M_n(\mathbb{K})$ に対して $\alpha$: 正則 $\Leftrightarrow$ $(\alpha\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0})$

$(\vec{f}_1 \cdots \vec{f}_\ell)\vec{c} = \vec{0}$ から $\vec{c} = \vec{0}$ となります ($\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_\ell$ はLI) 他方

$(\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell)\alpha\vec{c} = \vec{0}$ から $\alpha\vec{c} = \vec{0}$ となりますが, このとき $\alpha$ は正則となります.

逆行列を $\alpha^{-1} = (\hat{\alpha}^j_i)$ とすると

$$\vec{e}_i = \hat{\alpha}^j_i \vec{f}_j = \hat{\alpha}^1_i \vec{f}_1 + \cdots + \hat{\alpha}^l_i \vec{f}_l$$

となります。

$$(\vec{f}_1 \cdots \vec{f}_l) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_l) \begin{pmatrix} \hat{\alpha}^1_1 & \cdots & \hat{\alpha}^1_l \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\alpha}^l_1 & \cdots & \hat{\alpha}^l_l \end{pmatrix}$$

と表現できます。このとき $\vec{v} \in V$ に対して

$$\vec{v} \underset{\substack{\uparrow \\ ER}}{=} x^i \vec{e}_i = x^i \hat{\alpha}^j_i \vec{f}_j = y^j \vec{f}_j$$

基底のベクトルを2倍したら、対応する座標は1/2倍となります。だから反変と言います

とすると

$$y^j \underset{\uparrow}{=} x^i \hat{\alpha}^j_i = \sum_i x^i \hat{\alpha}^j_i$$

（逆は $x^i \underset{\uparrow}{=} y^j a^i_j = \sum_j y^j a^i_j$ ）

と座標変換が導びけます。

<u>双対座標の座標変換</u>　$\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^l$ が $V^*$ の基底なので

$$\boldsymbol{f}_j = c_1 \boldsymbol{e}^1 + \cdots + c_l \boldsymbol{e}^l$$

と書けます。

$$\boldsymbol{f}^j(\vec{e}_i) = \boldsymbol{f}^j(\hat{\alpha}^{j'}_i \vec{f}_{j'}) = \hat{\alpha}^{j'}_i \boldsymbol{f}^j(\vec{f}_{j'})$$

$$= \hat{\alpha}^{j'}_i \delta^j_{j'} = \hat{\alpha}^j_i$$

ここは修正します。

$$(c_1 \boldsymbol{e}^1 + \cdots + c_l \boldsymbol{e}^l)(\vec{e}_i) = c_i \boldsymbol{e}^i(\vec{e}_i) = c_i$$

から　$c_i = \hat{\alpha}^j_i$　従って　$\boldsymbol{f}^j \underset{\substack{\uparrow \\ ER}}{=} \hat{\alpha}^j_i \boldsymbol{e}^i = \hat{\alpha}^j_1 \boldsymbol{e}^1 + \cdots + \hat{\alpha}^j_l \boldsymbol{e}^l$

その逆は　$\boldsymbol{e}^i = \alpha^i_j \boldsymbol{f}^j$　が導けます。

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{f}^1 \\ \vdots \\ \mathfrak{f}^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}^1_1 & \cdots & \hat{\alpha}^1_l \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\alpha}^l_1 & \cdots & \hat{\alpha}^l_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbb{e}^l \end{pmatrix}$$

とその逆
$$\begin{pmatrix} \mathbb{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbb{e}^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \cdots & \alpha^1_l \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^l_1 & \cdots & \alpha^l_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{f}^1 \\ \vdots \\ \mathfrak{f}^l \end{pmatrix}$$

に注意.. 次に双対座標の変数変換は?

$$T = \xi_1 \mathbb{e}^1 + \cdots + \xi_l \mathbb{e}^l = \xi_i \mathbb{e}^i = \xi_i \alpha^i_j \mathfrak{f}^j = \eta_j \mathfrak{f}^j$$

とすると
$$\eta_j \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{ER}}}{=} \xi_i \alpha^i_j$$
であることがわかります. 逆は

この式を見て共変の意味を考えよう

$$\xi_i = \eta_j \hat{\alpha}^i_j$$

となります.