次元について

定理（超重要）$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell \in \mathbb{K}^n$ とする．$\ell > n$ ならば　①

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell$ は LD.　（n が小さいと示しています）

←証明は読むこと（実質的には示しています．）

（証明）(i) $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ が LD のとき $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n, \cdots, \vec{a}_\ell$ は LD.

(ii) $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ が LI のとき

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n) = I_n$$

となる．このとき

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n \mid \vec{a}_{n+1}) \to \cdots \to (I_n \mid \vec{c})$$

とすると $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + \cdots + c_n\vec{e}_n$ から $\vec{a}_{n+1} = c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n$

が従う．

系　$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m \in \mathbb{K}^n$ とします．$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell \in L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m)$ とします．

$\ell > m$ ならば $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell$ は LD.（対偶：$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell$ が LI ならば $\ell \leq m$）

証明　$$(\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_\ell) = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m)(\vec{c}_1 \cdots \vec{c}_\ell)$$

を満たす $\vec{c}_j \in \mathbb{K}^m$ が存在します．定理から $\exists \vec{x} (\neq \vec{0}) \in \mathbb{K}^\ell$

$(\vec{c}_1 \cdots \vec{c}_\ell)\vec{x} = \vec{0}$　このとき

$$\begin{aligned}(\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_\ell)\vec{x} &= (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m)(\vec{c}_1 \cdots \vec{c}_\ell)\vec{x} \\ &= (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m)\vec{0} = \vec{0}\end{aligned}$$

から $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell$ が LD であることが分かります．

---

n に関する帰納法でも示せます．㊟にあります．

系の系　$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m, \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l \in \mathbb{K}^n$ が次の条件を満たす ②

とする

i) $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m$ は LI

ii) $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l$ は LI

iii) $L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m) = L(\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l)$

$\Longrightarrow m = l.$

基底　$\mathbb{K}^n$ の部分空間 V が $V \neq \{\vec{0}\}$ を満たすとします.

$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l \in V$ が V の基底とは

i) $V = L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l)$

ii) $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l$ は LI

を満たすときです.

系の系 によると $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l$ が V の基底, $\vec{q}_1, \cdots \vec{q}_m$ が V の基底

ならば $l = m$ が分かります.

$V \subset \mathbb{K}^n$ が V の部分空間とは

$\vec{x}, \vec{y} \in V \Longrightarrow \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in V$

(+ と ・ について閉じている)

基底の存在　Vが$\mathbb{K}^n$の部分空間で，$V \neq \{\vec{0}\}$とします．

このとき Vには基底が存在します．

i) $V \neq \{\vec{0}\}$から $\exists \vec{p}_1 \in V$, $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$

ii a) $V = L(\vec{p}_1)$ならば　$\vec{p}_1$が基底．

ii b) $V \neq L(\vec{p}_1)$ならば $V \supsetneqq L(\vec{p}_1)$なので $\exists \vec{p}_2 \in V$, $\vec{p}_2 \notin L(\vec{p}_1)$
(このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2$はLI)

iii a) $V = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ならば $\vec{p}_1, \vec{p}_2$はVの基底

iii b) $V \neq L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ならば $V \supsetneqq L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$なので $\exists \vec{p}_3 \in V$, $\vec{p}_3 \notin L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$
(このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$はLI)

l b)
$V \neq L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{l-1})$ならば　$V \supsetneqq L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{l-1})$なので
このとき
($\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{l-1}$はLI)　$\exists \vec{p}_l \in V$, $\vec{p}_l \notin L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{l-1})$

$l+1$, a) $V = L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l)$ならば　$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l$は Vの基底

$l+1$, b) $V \neq L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l)$ならば $V \supsetneqq L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l)$なので
$\exists \vec{p}_{l+1} \in V$, $\vec{p}_{l+1} \notin L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l)$ (このとき $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{l+1}$はLI)

$\vdots$

これはどこまで続くか？

次元　$V \neq \{\vec{0}\}$を満たす$\mathbb{K}^n$の部分空間に対して基底$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l$

の存在が分かりました．このとき

$$\dim V = l$$

といいます．Vの次元はl

$\dim\{\vec{0}\} = 0$ とします。

以下の定理は今後時々使います。
(Aのメステージで何度も使います)
特に固有値問題で。

<u>定理</u>　$V, W (\subset \mathbb{K}^n)$ が部分空間とします。

(i) $V \subset W \Rightarrow \dim V \leq \dim W$

(ii) $V \subset W$ かつ $\dim V = \dim W \Rightarrow V = W$

(i) V の基底を $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$，$W$ の基底を $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_m$ とします。

$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell \text{ は LI で } \vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell \in L(\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_m)$$

から $\ell \leq m$ が従います。これは $\dim V \leq \dim W$ を意味します。

(ii) V の基底 $\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell$，$W$ の基底 $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell$ とします。

$V \subsetneqq W$ とすると $\exists\, \vec{p}_{\ell+1} \in W$, $\vec{p}_{\ell+1} \notin V$ このとき

$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{\ell+1}$ は LI．しかし　$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{\ell+1} \subset L(\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell)$

から $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_{\ell+1}$ は LD となってしまいます。従って $V = W$