掃き出し法入門　(V05 20250418, MSFLAL02 0417 後に修正)

3 次元列ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 18 \end{pmatrix}$$

とします．$\vec{a}, \vec{b}$ が生成する部分空間を

$$L(\vec{a}, \vec{b}) := \{x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbf{R}^3;\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

と定めます．このとき $\vec{q}, \vec{r} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ が成立するか考えます．

<u>$\vec{q}$ に関して</u>

$$\begin{aligned}
x\vec{a} + y{\color{red}\vec{b}} = \vec{q} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrll} x & + & 3y & = & 9 & \cdots & (i) \\ 2x & + & 2y & = & 10 & \cdots & (ii) \\ -x & + & y & = & -1 & \cdots & (iii) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrll} x & + & 3y & = & 9 & \cdots & (i)' = (i) \\ & - & 4y & = & -8 & \cdots & (ii)' := (ii) + (-2) \times (i) \\ & & 4y & = & 8 & \cdots & (iii)' := (iii) + 1 \times (i) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrll} x & + & 3y & = & 9 & \cdots & (i)'' = (i)' \\ & & y & = & 2 & \cdots & (ii)'' := (ii)' \times (-\frac{1}{4}) \\ & & 4y & = & 8 & \cdots & (iii)'' := (iii)' \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrll} x & & & = & 3 & \cdots & (i)_3 = (i)'' + (-3) \times (ii)'' \\ & & y & = & 2 & \cdots & (ii)_3 := (ii)'' \\ 0x & + & 0y & = & 0 & \cdots & (iii)_3 := (iii)'' + {\color{red}(-4)} \times (ii)'' \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x = 3,\ y = 2
\end{aligned}$$

となるので，$\vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ であることが従います．以上の計算は拡大行列を用いると

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 10 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(I)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(III)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表されます．ここで各ステップで以下の行基本変形を用いました．

$$(I)\ 2r+ = 1r \times (-2), 3r+ = 1r \times 1, \quad (II)\ 2r \times (-\frac{1}{4}), \quad (III)\ 1r+ = 2r \times (-3),\ 3r+ = 2r \times (-4)$$

<u>$\vec{r}$ に関して</u>

$$\begin{aligned}
x\vec{a} + y{\color{red}\vec{b}} = {\color{red}\vec{r}} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrll} x & + & 3y & = & -5 & \cdots & (i) \\ 2x & + & 2y & = & -11 & \cdots & (ii) \\ -x & + & y & = & 18 & \cdots & (iii) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrll} x & + & 3y & = & -5 & \cdots & (i)' = (i) \\ & - & 4y & = & -1 & \cdots & (ii)' := (ii) + (-2) \times (i) \\ & & 4y & = & 13 & \cdots & (iii)' := (iii) + 1 \times (i) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrll} x & + & 3y & = & -5 & \cdots & (i)'' = (i)' \\ & & y & = & \frac{1}{4} & \cdots & (ii)'' := (ii)' \times (-\frac{1}{4}) \\ & & 4y & = & 13 & \cdots & (iii)'' := (iii)' \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrll} x & & & = & -\frac{13}{4} & \cdots & (i)_3 = (i)'' + (-3) \times (ii)'' \\ & & y & = & \frac{1}{4} & \cdots & (ii)_3 := (ii)'' \\ 0x & + & 0y & = & 12 & \cdots & (iii)_3 := (iii)'' + {\color{red}(-4)} \times (ii)'' \end{array}\right.
\end{aligned}$$

となるので，$(iii)_3$ を満たす $x, y \in \mathbf{R}$ が存在しないので ${\color{red}\vec{r}} \notin L(\vec{a}, \vec{b})$ であることが従います．以上の計算は拡大行列を用いると

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 10 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(I)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(III)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{23}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

と表されます．ここで各ステップで $\vec{q}$ の場合と同一の変形を用いています．このことから同時に計算をしてしまえばよいことが分かります．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -5 \\ 2 & 2 & 10 & -11 \\ -1 & 1 & -1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{(I)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 4 & 8 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(III)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -\frac{23}{4} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(IV)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -\frac{23}{4} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(V} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで上で定めた $(I), (II), (III)$ に加えて

$$(IV)\ 3r* = \frac{1}{12}, \quad (V)\ 1r+ = 3r \times \frac{23}{4},\ 2r+ = 3r \times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

と行基本変形しています．

　最後に連立 1 次方程式

$$(\#) \begin{cases} x & + & 3y & + & 9z & - & 5w & = & 16 \\ 2x & + & 2y & + & 10z & - & 10w & = & 21 \\ -x & + & y & - & z & - & 18w & = & -19 \end{cases}$$

について考えます．これは $\vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ -19 \end{pmatrix}$ に対して

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{q} + w\vec{r} = \vec{c}$$

を考えることと同じです．行基本変形

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 9 & -5 & 16 \\ 2 & 2 & 10 & -11 & 21 \\ -1 & 1 & -1 & 18 & -19 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

から

$$(\#) \Leftrightarrow \begin{cases} x & & & + & 3z & & = & 3 \\ & & y & + & 2z & & = & 2 \\ & & & & & w & = & -1 \end{cases}$$

であることが分かり，Pivot のない変数 z に関して $z = \alpha$ とおくと解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha+3 \\ -2\alpha+2 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} --3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となります．ここで α は任意の定数です．

問 上で省略した行基本変形を求めましょう．