

行基本変形により $\exists \Sigma, \Gamma$ なる $n \times n$ 行列

(存在)

定理 1

$A \in M_{m,n} (1 \leq n) \text{ といふとき, } \exists \alpha \in \mathbb{R}$

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow A_0$$

と行基本変形を行って $\bigcup_{i=1}^r$ は行基本変形 A_0 となる。

3.1.1. 例として $n=5$ の数値的計算系内 $\exists \Sigma, \Gamma$ となる。

$n=1$ のとき $A = (\vec{a})$ といふ。

$$\vec{a} = \vec{0} \text{ のとき}$$

$A = (\vec{0})$ なる $n \times n$ 行列の行基本変形

$$\vec{a} \neq \vec{0} \text{ のとき}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_k \\ * \end{pmatrix} \quad k \geq 1, a_k \neq 0$$

と表現できる。

$$\vec{a} \xrightarrow{1 \leftrightarrow k} \begin{pmatrix} a_k \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \times \frac{1}{a_k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{i \leftrightarrow j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

と行基本変形 A_0 となる。

$(n-1)$ まで 0 になる。

1) 第 1 行 Σ の (1, 1) 要素は σ_1

(2)

$$(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ 1 & * & 0 & * & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & * \\ & & 0 & & & \end{array} \right) = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{n-1})$$

と σ_1 の β 段階行 β は β 行 β 列要素 β である。

$$A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{n-1} \vec{a}_n) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \sigma_1 & & & & & & \beta_1 \\ 1 & * & 0 & * & & & \beta_2 \\ & & 1 & & & & \beta_{l+1} \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & * & \beta_n \end{array} \right) = B$$

$= (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_{n-1} \vec{e}_n)$

と行 β 列 β 要素 β である。

$$\begin{pmatrix} \beta_{l+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ である } B \text{ は } \sigma_1 \text{ の } \beta \text{ 段階行 } \beta \text{ である。}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{l+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ である } = \text{ある } \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_l \\ 0 \\ \vdots \\ \beta_n \\ * \end{pmatrix}, \beta_n \neq 0, n \leq l+1$$

と表現 β である。

$$A \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & & & \sigma_1 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \sigma_l & & \\ \hline & & & \beta_n & & \\ & 0 & & \sigma_{l+2} & & \\ & & & * & & \end{array} \right) \xrightarrow{\sigma_{l+2} = \frac{1}{\beta_n}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & & & \sigma_1 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \sigma_l & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & 0 & & \sigma_{l+2} & & \end{array} \right)$$

$\rightarrow \sigma_{l+2} = \sigma_{l+2} \times (-\sigma_l)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & 0 & & \vdots & & \end{array} \right)$$

(4)

$\sigma_{l+1} \neq 0 \ a \in \mathbb{F}$. β の基底 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_l\}$ と $\vec{e}_{l+1}$ の

$$\vec{e}_n = \vec{e}_{l+1} \in \mathbb{F}^n \text{ かつ } \vec{e}_n = a \vec{e}_n$$

$$\vec{e}_{d_1}, \dots, \vec{e}_{d_l}, \vec{e}_n \text{ は LI かつ } \vec{e}_n \in \mathbb{F}^n,$$

$$\vec{a}_{d_1}, \dots, \vec{a}_{d_l}, \vec{a}_n \text{ は LI かつ } \vec{a}_n \in \mathbb{F}^n \text{ かつ } \vec{a}_n =$$

$$\vec{c}_{d_1}, \dots, \vec{c}_{d_l}, \vec{c}_n \text{ は LI かつ } \vec{c}_n = \vec{e}_{l+1} \text{ かつ } \vec{c}_n \in \mathbb{F}^n.$$

$\sigma_{l+1} = 0 \ a \in \mathbb{F}$. $\vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_{d_1} + \dots + \beta_l \vec{e}_{d_l}$ かつ

$$\vec{a}_n = \beta_1 \vec{a}_{d_1} + \dots + \beta_l \vec{a}_{d_l}$$

$$\in \mathbb{F}^n \text{ かつ } \vec{a}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_l \vec{e}_l = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_l \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

$$\beta_1 = \sigma_1, \dots, \beta_l = \sigma_l, \sigma_{l+1} = 0 \text{ かつ } \vec{e}_n = \vec{c}_n$$

と $\vec{c}_n$ 一致する。