

掃き出し法アルゴリズムについて

定理 0.1. (行基本変形の存在) $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ とします. このとき

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow A_0$$

と狭義の階段行列 A_0 に行基本変形できます.

証明 A の列数 n に関する数学的帰納法によって証明します.

$n = 1$ のとき $A = \vec{a}$ とします.

$\vec{a} = \vec{0}$ のとき $A = (\vec{0})$ そのものが狭義の階段行列です.

$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_k \\ * \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ (ただし $a_k \neq 0, k \geq 1$) と表現できます. このとき

$$\vec{a} \xrightarrow{1r \leftrightarrow kr} \begin{pmatrix} a_k \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \times = \frac{1}{a_k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \xrightarrow{ir += 1r \times (-\beta_i) \ (i=1, \dots, m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

と狭義の階段行列 $A = (\vec{e}_1)$ に行基本変形できます.

$(n-1)$ 列まで定理が成立すると仮定します. 帰納法の仮定によって A の第 1 列から第 $(n-1)$ 列までの行列は

$$(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_{n-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \end{array} \right)$$

と狭義の階段行列に行基本変形できます. ここで Pivot は $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (\ell, j_\ell)$ 成分にあるとします. この行基本変形を第 n 列を含めて施すと

$$(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_{n-1} | \vec{a}_n) \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc|c} 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \beta_1 \\ & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \beta_2 \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \beta_\ell \\ & & & & & & & & & & & & \beta_{\ell+1} \\ & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & \beta_m \end{array} \right)$$

となります. ここで最後の行列を $B = (\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_{n-1} | \vec{b}_n)$ とします.

$\begin{pmatrix} \beta_{\ell+1} \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \vec{0}$ のとき B は狭義の階段行列ですから, この場合は証明が終了します.

$\begin{pmatrix} \beta_{\ell+1} \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ のとき さらに B を行基本変形していきます。(最後の第 n 行だけを表現していきます。) ここで B の第 n 列に関して

$$\vec{b}_n = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\ell \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad \beta_k \neq 0, \quad k \geq \ell + 1$$

であるとします。このとき

$$B \xrightarrow{(\ell+1)r \leftrightarrow kr} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_\ell \\ \beta_k \\ \gamma_{\ell+2} \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \xrightarrow{(\ell+1)r \times = \frac{1}{\beta_k}} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_\ell \\ 1 \\ \gamma_{\ell+2} \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \xrightarrow{ir += (\ell+1)r \times (-\gamma_i) \ (i \neq \ell+1)} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

と狭義の階段行列に行基本変形できます。(定理の証明おわり)

以上は具体例をもとに説明してきた内容です。次に示す定理は行基本変形で得られる狭義の階段行列の一意性に関するものです。

定理 0.2. $A \in M_{m,n}$ に対して

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow B$$

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow C$$

と狭義の階段行列 B, C に行基本変形できたとします。このとき $B = C$ が成立します。

証明は A の列数 n に関する帰納法によって証明します。以下では

$$A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n), \quad B = (\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_n), \quad C = (\vec{c}_1 \ \cdots \ \vec{c}_n)$$

と列ベクトルの名前を定めて議論します。

$n = 1$ のとき $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ のとき $(\vec{a}_1) \rightarrow (\vec{c}_1)$, $\vec{a}_1 = \vec{0}$ のとき $(\vec{a}_1) = (\vec{0})$ なので $B = C$ は明らかです。

$(n - 1)$ のとき 定理が成立するとします。このとき

$$A_{n-1} := (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_{n-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow B_{n-1} := (\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_{n-1})$$

$$A_{n-1} := (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_{n-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow C_{n-1} := (\vec{c}_1 \ \cdots \ \vec{c}_{n-1})$$

と行基本変形されます。 B_{n-1} と C_{n-1} は狭義の階段行列になりますから

$$D := B_{n-1} = C_{n-1}$$

であることが帰納法の仮定から従います。

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{1 \ * \ \cdots \ *} & \boxed{0 \ * \ \cdots \ *} & & 0 \ * \ \cdots \ * \\ & \boxed{1 \ * \ \cdots \ *} & & 0 \ * \ \cdots \ * \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{1 \ * \ \cdots \ *} \end{pmatrix}$$

として Pivot が $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (\ell, j_\ell)$ 成分にあるとします. このとき B と C においてそれぞれ第 $(n-1)$ 列と第 n 列の間で階数がそのままか 1 増えるかどうかなので, B と C の第 n 列は

$$\vec{b}_n = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\ell \\ \beta_{\ell+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_n = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_\ell \\ \gamma_{\ell+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となります. ここで場合を分けて考えます.

$\vec{a}_n \notin L(\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_\ell})$ のとき

$$\vec{b}_n = \vec{c}_n = \vec{e}_\ell$$

となりますから $B = C$ であることが分かります.

$\vec{a}_n \in L(\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_\ell})$ のとき $\beta_{\ell+1} = \gamma_{\ell+1} = 0$ となり, さらに

$$\vec{a}_n = \beta_1 \vec{a}_{j_1} + \dots + \beta_\ell \vec{a}_{j_\ell} = \gamma_1 \vec{a}_{j_1} + \dots + \gamma_\ell \vec{a}_{j_\ell}$$

となります. $\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_\ell}$ が線型独立であることから

$$\beta_1 = \gamma_1, \dots, \beta_\ell = \gamma_\ell$$

従って $\vec{b}_n = \vec{c}_n$ であることが分かります. これから $B = C$ が従います.