L01_0625 練習

I 以下の行基本変形に対応する基本行列 P を求めよ.

(1) $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ w \\ z \\ y \end{pmatrix}$ (2) $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda z \\ w \end{pmatrix}$ $(\lambda \neq 0)$

(3) $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda x + z \\ w \end{pmatrix}$ (4) $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda w \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$

II 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} \alpha & x & y \\ 0 & \beta & z \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ x & \beta & 0 \\ y & z & \gamma \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

III $\mathbb{K}^4$ の2次元部分空間 V の基底 $\vec{p}, \vec{q}$ がある.
次のベクトルの組が V の基底になることを示せ.

(1) $\vec{p}+\vec{q},\ \vec{p}-\vec{q}$ (2) $\vec{p},\ \vec{p}+\lambda\vec{q}$ (3) $\vec{p}-\mu\vec{q},\ \vec{q}$

(4) $\alpha\vec{p}+\beta\vec{q},\ \gamma\vec{p}+\delta\vec{q}$ 但し $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$

II 次の $A \in M_2(\mathbb{R})$ の逆行列を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

I (1) $P = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$ (2) $P = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&\lambda&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

(3) $P = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ \lambda&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ (4) $P = \begin{pmatrix} 1&0&0&\lambda \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

II (1) $\alpha\ \beta\ \gamma$ (2) $\alpha\ \beta\ \gamma$

(3) 行列の基本性質を使う.

$$\begin{vmatrix} 2&1&3 \\ -1&2&1 \\ 1&5&-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&1&0 \\ -5&2&-5 \\ -9&5&-17 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -5&-5 \\ -9&-17 \end{vmatrix}$$

$$= 5\begin{vmatrix} 1&1 \\ -9&-17 \end{vmatrix} = 5\cdot(-17+9) = 5\cdot(-8)$$

$$= -40$$

(4) (3)と同様に計算する.

III (1) $\vec{p}, \vec{q}$ は V の基底なので LI である.

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{r} = x\vec{p} + y\vec{q},\ s = z\vec{p} + w\vec{q} \text{ に対して} \\ \vec{r} \nparallel \vec{s} \iff \begin{vmatrix} x&y \\ z&w \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}}$$

と思い出そう. $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q},\ \vec{s} = \vec{p} - \vec{s}$ とすると

$$\begin{vmatrix} 1&1 \\ 1&-1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ から}$$

$\vec{r}, \vec{s}$ は LI である. $V = L(\vec{p}, \vec{q})$ なので $\forall \vec{v} \in V$ は

$\vec{v} = v_1\vec{p} + v_2\vec{q}$ と書ける.

$$v_1\vec{p}+v_2\vec{q}=u_1\vec{r}+u_2\vec{s}=u_1(\vec{p}+\vec{q})+u_2(\vec{p}-\vec{q})$$
$$=(u_1+u_2)\vec{p}+(u_1-u_2)\vec{q}$$

なので $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ から

$$(\sharp)\begin{cases} u_1+u_2=v_1 \\ u_1-u_2=v_2 \end{cases} \iff v_1\vec{p_1}+v_2\vec{p_2}=u_1\vec{r}+u_2\vec{s}$$

が成立します。$(\sharp)$ は $\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0$ からクラメールの公式を用いて

u_1, u_2 について解いて

$$\begin{cases} u_1=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}v_1&1\\v_2&-1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}v_2 \\ u_2=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&v_1\\1&v_2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}v_1-\frac{1}{2}v_2 \end{cases}$$

が解である。従って $\forall\vec{v}\in V=L(\vec{p},\vec{q})$ は $\vec{v}\in L(\vec{r},\vec{s})$.

以上で $\vec{r},\vec{s}\in V$ は V の基底であることが示せた。

<u>補足</u>　$\vec{v}\in V=L(\vec{p},\vec{q})$ は

$$\vec{v}=v_1\vec{p}+v_2\vec{q}=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

と表わせる。(*) $(\vec{r}\ \vec{s})=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ において $\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0$

から $\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ は正則で $\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

(*) の両辺に $\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}$ を右からかけると

$$(\vec{r}\ \vec{s})\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=(\vec{p}\ \vec{q})I_2=(\vec{p}\ \vec{q})$$

これから

$$\vec{v}=(\vec{r}\ \vec{s})\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

ここで $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ とすると $\vec{v}=(\vec{r}\ \vec{s})\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\underbrace{u_1\vec{r}+u_2\vec{s}}_{\in L(\vec{r},\vec{s})}$

(2) $\vec{r}=\vec{p},\ \vec{s}=\vec{p}+\lambda\vec{q}$ とすると

$$(\vec{r}\ \vec{s})=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}$$

となり $\begin{vmatrix}1&\lambda\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$ から $\vec{r}\nparallel\vec{s}$ が従う. ($\vec{p}\nparallel\vec{q}$ に注意)

$\forall\vec{v}\in V=L(\vec{p},\vec{q})$ は $\vec{v}=v_1\vec{p}+v_2\vec{q}=(v_1-\lambda v_2)\vec{p}+v_2(\lambda\vec{p}+\vec{q})$

$$=(v_1-\lambda v_2)\vec{r}+v_2\vec{s}\in L(\vec{r},\vec{s})$$

から $\vec{r},\vec{s}$ は V の基底である.

(3) $\vec{r}=\vec{p}-\lambda\vec{q},\ \vec{s}=\vec{q}$ とすると

$$(\vec{r}\ \vec{s})=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}1&0\\-\lambda&1\end{pmatrix}$$

となり $\begin{vmatrix}1&0\\-\lambda&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ から $\vec{r}\nparallel\vec{s}$ が従う. ($\vec{p}\nparallel\vec{q}$ に注意)

$\forall\vec{v}\in V=L(\vec{p}\ \vec{q})$ は $\vec{v}=v_1\vec{p}+v_2\vec{q}=v_1(\vec{p}-\lambda\vec{q})+(-\lambda v_1+v_2)\vec{q}$

$$=v_1\vec{r}+(-\lambda v_1+v_2)\vec{s}\in L(\vec{r},\vec{s})$$

から $\vec{r},\vec{s}$ は V の基底である.

(4) $\vec{r}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q},\ \vec{s}=\gamma\vec{p}+\delta\vec{q}$ とします. $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ なので

$$(\vec{r}\ \vec{s})=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\beta&\delta\end{pmatrix}$$

において $D:=\begin{vmatrix}\alpha&\gamma\\\beta&\delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ から $\vec{r}\nparallel\vec{s}$ が従います.

⊛ $(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=(\vec{r}\ \vec{s})\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$

が成立する $u_1,u_2\in\mathbb{K}$ が存在するか考えます.

$$(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\beta&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

となりますが $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ から $(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

が成立します. 従って

④

$$(*) \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

が分かります. $D = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ から $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ は正則で

$$(*) \iff \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が従います. 従って $\vec{v} \in L(\vec{r}, \vec{s})$ が分かります.

注 $v_1 \vec{p} + v_2 \vec{q} = u_1 \vec{r} + u_2 \vec{s}$ のとき.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

逆に

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が成立します. $\vec{p}, \vec{q}$ が基底のときの座標 v_1, v_2 と $\vec{r}, \vec{s}$ が基底のときの座標 u_1, u_2 の間の座標変換と呼びます.

II $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3-8 = -5 \neq 0$ なので A は正則で

(1)

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10-4 = -14 \neq 0$ なので A は正則で

$$A^{-1} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) $|A| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$ なので

A は正則で

注 L02_0612で説明

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$