

I (2-1) 2" 成立 する こと を 示す .

$$\vec{x}_j \in V(\alpha_j) \quad (j=1, \dots, \ell), \quad \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_\ell = \vec{0} \quad \dots \textcircled{1}$$

と する . ① に $A - \alpha_\ell I_n$ を かけ る と

$$(\alpha_1 - \alpha_\ell) \vec{x}_1 + \dots + (\alpha_{\ell-1} - \alpha_\ell) \vec{x}_{\ell-1} = \vec{0}$$

と なる . ① 2" $(\alpha_j - \alpha_\ell) \vec{x}_j \in V(\alpha_j) \quad (j=1, \dots, \ell-1)$ が 成立 する のを (2-1) を 用いる と

$$(\alpha_1 - \alpha_\ell) \vec{x}_1 = \dots = (\alpha_{\ell-1} - \alpha_\ell) \vec{x}_{\ell-1} = \vec{0}$$

$\alpha_j - \alpha_\ell \neq 0 \quad (j=1, \dots, \ell-1)$ より

$$\vec{x}_1 = \dots = \vec{x}_{\ell-1} = \vec{0}$$

また ① 1" $\vec{x}_\ell = \vec{0}$ が 従っ て くる .

II (1) $V_1 + \dots + V_\ell$ が 直和 である ことを 示す .

$$\vec{x}_1 \in V_1, \dots, \vec{x}_{\ell-1} \in V_{\ell-1}, \quad \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{\ell-1} = \vec{0}$$

もし ① $\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{\ell-1} + \vec{0} = \vec{0}$ かつ $\vec{x}_1 = \dots = \vec{x}_{\ell-1} = \vec{0}$ と なる ことはない .

($\vec{0} \in V_\ell$ である こと)

よって $V_1 + \dots + V_{\ell-1}$ は 直和 である ことが 示せる .

$$V_1 + \dots + V_\ell \text{ が 直和 } \Rightarrow V_1 + \dots + V_{\ell-1} \text{ は 直和}$$

② 2" は ① 2" に

$$V_1 + \dots + V_\ell = (V_1 + \dots + V_{\ell-1}) + V_\ell$$

が 示さ れ る . $(V_1 \oplus \dots \oplus V_{\ell-1}) + V_\ell$ が 直和 である こと を 示す .

(2)

$\vec{w} \in V_1 \oplus \dots \oplus V_{l-1}, \vec{x}_l \in V_l$ かつ $\vec{w} + \vec{x}_l = \vec{0}$ であるとする。

すなわち $\vec{w} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{l-1}, \vec{x}_j \in V_j (j=1, \dots, l-1)$ かつ $\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{l-1} + \vec{x}_l = \vec{0}$

$$\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{l-1} + \vec{x}_l = \vec{0}$$

と仮定 $\vec{x}_1 = \dots = \vec{x}_{l-1} = \vec{x}_l = \vec{0}$ と仮定せず。 すなわち $\vec{w} = \vec{0}$ である ことが分かる。

よって

$(V_1 \oplus \dots \oplus V_{l-1}) + V_l$ は直交する。

(2) V_1 の基底 $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{m_1}, V_2$ の基底 $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_{m_2}$ とする。

すなわち $\forall \vec{v} \in V_1 + V_2$ は

$$\vec{v} = c_1 \vec{p}_1 + \dots + c_{m_1} \vec{p}_{m_1} + d_1 \vec{q}_1 + \dots + d_{m_2} \vec{q}_{m_2}$$

と表わす。

$$c_1 \vec{p}_1 + \dots + c_{m_1} \vec{p}_{m_1} + d_1 \vec{q}_1 + \dots + d_{m_2} \vec{q}_{m_2} = \vec{0}$$

$V_1 + V_2$ かつ直交する。

$$c_1 \vec{p}_1 + \dots + c_{m_1} \vec{p}_{m_1} = \vec{0}, d_1 \vec{q}_1 + \dots + d_{m_2} \vec{q}_{m_2} = \vec{0}$$

が成り立つ。すなわち $\{\vec{p}_i\}, \{\vec{q}_j\}$ かつ LI である。

$$c_1 = \dots = c_{m_1} = 0, d_1 = \dots = d_{m_2} = 0$$

と仮定せず。すなわち

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = m_1 + m_2 = \dim V_1 + \dim V_2$$

2"番目 = 2"番目。すなわち

(3) (2-1) は仮定である。

$$\dim(V_1 \oplus \dots \oplus V_l) = \dim((V_1 \oplus \dots \oplus V_{l-1}) \oplus V_l)$$

$$= \dim(V_1 \oplus \dots \oplus V_{l-1}) + \dim V_l = \dim V_1 + \dots + \dim V_{l-1} + \dim V_l$$

(2-1)

$$\text{III} \quad \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V^\perp \subseteq \mathbb{F}_3, = 0 \in \mathbb{F}_3 \quad \forall \vec{v} \in V = \mathbb{F}_3^2$$

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2, \vec{v}) &= \lambda (\vec{w}_1, \vec{v}) + \mu (\vec{w}_2, \vec{v}) \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 \in V^\perp \text{ since } \mathbb{F}_3.$$