L16-1211 練習問題　V02 修正版
(問題IVを修正)

I (1) $V_1, V_2\ (\subset \mathbb{K}^n)$ を部分空間とする.

$$V_1+V_2 := \{\vec{v}_1+\vec{v}_2 \in \mathbb{K}^n ; \vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2\}$$

が $\mathbb{K}^n$ の部分空間であることを示せ.

(2) $V_1, V_2, V_3\ (\subset \mathbb{K}^n)$ を部分空間とする.

$$V_1+V_2+V_3 := \{\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3 \in \mathbb{K}^n ; \vec{v}_j \in \mathbb{K}^n\ (j=1,2,3)\}$$

が $\mathbb{K}^n$ の部分空間であることを示せ.

II $V_1, \cdots, V_\ell\ (\subset \mathbb{K}^n)$ を部分空間とします.

(1)

$$V_1+\cdots+V_\ell := \{\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_\ell \in \mathbb{K}^n ; \vec{v}_j \in V_j\ (j=1,\cdots,\ell)\}$$

が部分空間であることを示せ.

(2)

$$(V_1+\cdots+V_{\ell-1})+V_\ell = V_1+\cdots+V_{\ell-1}+V_\ell$$

が成立することを示せ.

(これはのちに直和の和空間に関する次元の話で必要となります)

III $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\vec{p} \in \mathbb{K}^n$ が

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}$$

を満たすとき $f \in \mathbb{K}[\lambda]$ に対し

$$f(A)\vec{p} = f(\alpha)\vec{p}$$

を示せ. (ヒント. $f(\lambda)=\lambda^\ell$ についてまず示せ.)

IV　$V (\subset \mathbb{R}^n)$を部分空間として 実対称な $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$(\vec{v} \in V \Rightarrow A\vec{v} \in V)$

が成立するとき V を A 不変といいます.

A が対称のとき $V^\perp$ も A 不変であることを示せ.

V (1) $P \in O(3)$ とします $|P| = -1$ とするとき $\exists \vec{q} \in \mathbb{R}^3$ が

$$P\vec{q} = -\vec{q}, \quad \vec{q} \neq \vec{0}$$

を満たすことを示しましょう.

(2) $P \in O(3)$, $|P| = -1$ とします. $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in \mathbb{R}^3$ が

$$P\vec{q}_j = -\vec{q}_j, \quad \vec{q}_1 \nparallel \vec{q}_2$$

$$\Longrightarrow \quad P = -I_3$$

が成立することを示しましょう.

VI　$P \in O(3)$, $|P| = -1$ とします. $P \neq -I_3$ とします.

(1) $\Phi_P(1) = 0$ のとき $\exists Q \in SO(3)$

$$^tQPQ = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

が成立することを示せ.

(2)* Unitary 行列の固有値 $\alpha \in \mathbb{C}$ は $|\alpha| = 1$ を満たすことを練習問題で示している(探すこと)

$\Phi_P(1) \neq 0$ のとき

$$^tQPQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる $Q \in SO(3)$ が成立することを示せ.