

I (1) $\vec{p}, \vec{q} \in V_1 + V_2$ とする

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (\vec{p}_j \in V_j \quad (j=1,2))$$

$$\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \quad (\vec{q}_j \in V_j \quad (j=1,2))$$

と表わされたり。とせよ。

$$\begin{aligned} \lambda \vec{p} + \mu \vec{q} &= \lambda (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) + \mu (\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \\ &= (\lambda \vec{p}_1 + \mu \vec{q}_1) + (\lambda \vec{p}_2 + \mu \vec{q}_2) \end{aligned}$$

よって $\lambda \vec{p}_1 + \mu \vec{q}_1 \in V_1, \lambda \vec{p}_2 + \mu \vec{q}_2 \in V_2$ であるから $\lambda \vec{p} + \mu \vec{q} \in V_1 + V_2$

(2) $\vec{p}, \vec{q} \in V_1 + V_2 + V_3$ とする

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \quad (\vec{p}_j \in V_j \quad (j=1,2,3))$$

$$\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 \quad (\vec{q}_j \in V_j \quad (j=1,2,3))$$

と表わされたり。とせよ。

$$\begin{aligned} \lambda \vec{p} + \mu \vec{q} &= \lambda (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) + \mu (\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) \\ &= (\lambda \vec{p}_1 + \mu \vec{q}_1) + (\lambda \vec{p}_2 + \mu \vec{q}_2) + (\lambda \vec{p}_3 + \mu \vec{q}_3) \end{aligned}$$

よって $\lambda \vec{p}_j + \mu \vec{q}_j \in V_j \quad (j=1,2,3)$ であるから $\lambda \vec{p} + \mu \vec{q} \in V_1 + V_2 + V_3$

II (1) $\vec{p}, \vec{q} \in V_1 + \dots + V_\ell$ とする

(2)

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_\ell \quad (\vec{p}_j \in V_j \quad (j=1, \dots, \ell))$$

$$\vec{q} = \vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_\ell \quad (\vec{q}_j \in V_j \quad (j=1, \dots, \ell))$$

と表わされ得る。このとき

$$\lambda \vec{p} + \mu \vec{q} = \lambda (\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_\ell) + \mu (\vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_\ell)$$

$$= (\lambda \vec{p}_1 + \mu \vec{q}_1) + \dots + (\lambda \vec{p}_\ell + \mu \vec{q}_\ell)$$

1. $\lambda \vec{p}_j + \mu \vec{q}_j \in V_j \quad (j=1, \dots, \ell)$ なることより $\lambda \vec{p} + \mu \vec{q} \in V_1 + \dots + V_\ell$

(2) $\vec{q} \in (V_1 + \dots + V_{\ell-1}) + V_\ell$ とする

$$\vec{q} = \vec{q}_0 + \vec{q}_\ell, \quad \vec{q}_0 \in V_1 + \dots + V_{\ell-1}, \quad \vec{q}_\ell \in V_\ell$$

と仮定する。すなわち $\vec{q}_0 = \vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_{\ell-1}, \quad \vec{q}_j \in V_j \quad (1 \leq j \leq \ell-1)$ と仮定する。

$$\vec{q} = \vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_{\ell-1} + \vec{q}_\ell, \quad \vec{q}_j \in V_j \quad (1 \leq j \leq \ell)$$

1. $\vec{q} \in V_1 + \dots + V_{\ell-1} + V_\ell$ なること。

2. $\vec{q} \in V_1 + \dots + V_{\ell-1} + V_\ell$ とする

$$\vec{q} = \vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_{\ell-1} + \vec{q}_\ell, \quad \vec{q}_j \in V_j \quad (j=1, \dots, \ell)$$

と仮定する。このとき

$$\vec{q}_1 + \dots + \vec{q}_{\ell-1} \in V_1 + \dots + V_{\ell-1}, \quad \vec{q}_\ell \in V_\ell$$

から $\vec{q} \in (V_1 + \dots + V_{\ell-1}) + V_\ell$ なること。

$$\text{III} \quad \text{if } \alpha \in \mathbb{F} \quad A^l \vec{p} = \alpha^l \vec{p} \in W = \{ \vec{x} \in V \mid A \vec{x} = \alpha \vec{x} \} \quad l=1 \quad \alpha \in \mathbb{F} \text{ ok } \vec{p} \in W. \quad (3)$$

$$l=1 \text{ ok } \vec{p} \in W \quad A^{l-1} \vec{p} = \alpha^{l-1} \vec{p} \quad \text{since } \vec{p} \in W \text{ and } A \vec{p} = \alpha \vec{p}$$

$$\begin{aligned} A^l \vec{p} &= A \cdot A^{l-1} \vec{p} = A \cdot \alpha^{l-1} \vec{p} = \alpha^{l-1} A \vec{p} \\ &= \alpha^{l-1} \cdot \alpha \vec{p} = \alpha^l \vec{p}. \end{aligned}$$

is ok.

$$f(\lambda) = a_m \lambda^m + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

is ok.

$$\begin{aligned} f(A) \vec{p} &= (a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 I_n) \vec{p} \\ &= a_m A^m \vec{p} + \dots + a_1 A \vec{p} + a_0 \vec{p} \\ &= a_m \alpha^m \vec{p} + \dots + a_1 \alpha \vec{p} + a_0 \vec{p} \\ &= (a_m \alpha^m + \dots + a_1 \alpha + a_0) \vec{p} = f(\alpha) \vec{p}. \end{aligned}$$

$$\text{IV} \quad \vec{w} \in V^\perp \text{ is ok. } \forall \vec{v} \in V \text{ is ok.}$$

$$(\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{w}, A \vec{v}) = (\vec{w}, A \vec{v})$$

$$= 0 \quad \text{since } A \vec{v} \in V \text{ and } \vec{w} \in V^\perp \text{ is ok.}$$

$$(\vec{w}, A \vec{v}) = 0 \quad \text{for all } \vec{v} \in V \quad (A \vec{w}, \vec{v}) = 0$$

$$\text{For } A \vec{w} \in V^\perp \text{ is ok. } V^\perp \text{ is } A \vec{w} \in V^\perp \text{ is ok.}$$

V(1)

④

$$|P + I_3| = |P + tPP| = |P| |I_3 + tP|$$

$$= |P| \cdot |\overset{t}{(I_3 + P)}| = |P| \cdot |I_3 + P|$$

$$\uparrow$$

$$t(I_3 + P) = tI_3 + tP = J_3 + tP$$

$$= -|I_3 + P|$$

$$\therefore |P + I_3| = 0 \text{ なる } t \text{ が存在する } \Leftrightarrow \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \text{ なる}$$

$$P\vec{0} = -\vec{0}, \vec{0} \neq \vec{0}$$

$$\Sigma \ni \frac{P}{|P|} \quad T = I \neq J.$$

⑤ $P \in M_3(\mathbb{C})$ なる $P^*P = PP^* \Sigma \ni \frac{P}{|P|} \quad T = J$ なる P は 正規行列 であることが分かります。

$$T = I \quad P^* = P$$

$$T = J \quad P^*P = PP^* = I_3$$

⑥ 定義 1.11 による $T = I$ と $T = J$ なる P は 正規行列 であることが分かります。 $P \in O(3)$ は 正規行列 であることが分かります。

⑥

補足 実は P が正定値 $\Leftrightarrow \exists U \in U(3)$ $U = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ 行列の
存在に

$$U^* P U = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

と対角化できる。 $|P| = -1$ のため P の固有値は

$$\alpha \beta \gamma = -1$$

P が Unitary なら $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ となり得る。

$\alpha = \beta = -1$ のため $\gamma = -1$ が必要。

$$U^* P U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = -I_3$$

より $P = -U I_3 U^* = -U U^* = -I_3$

となり得る。

V (1) ρ の固有値は α, β, γ かつ $\alpha + \beta + \gamma = 0$ かつ $\alpha\beta\gamma = -1$ となる。
 7

$\alpha = -1, \beta = 1$ かつ $\gamma = 1$ となる。

-1 の固有ベクトルは $\vec{e}_1$ となる。 $V = \mathbb{R}\vec{e}_1$ となる。

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の正交基底である。 $Q = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \in SO(3)$

となる。 $(\rho\vec{e}_1, \rho\vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$
 $-(\vec{e}_1, \rho\vec{e}_2)$

かつ $(\rho\vec{e}_2, \vec{e}_1) = 0$ (同様に $(\rho\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0$ となる)。

従って $\rho\vec{e}_2 = *_{\vec{e}_2} + *_{\vec{e}_3}$, $\rho\vec{e}_3 = *_{\vec{e}_2} + *_{\vec{e}_3}$ となる。

$\rho Q = Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & *_{\vec{e}_2} \#_{\vec{e}_2} \\ 0 & *_{\vec{e}_3} \#_{\vec{e}_3} \end{pmatrix}$
 $= \alpha$ かつ $Q\rho Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & *_{\vec{e}_2} \#_{\vec{e}_2} \\ 0 & *_{\vec{e}_3} \#_{\vec{e}_3} \end{pmatrix}$ となる。 $\rho \in O(3)$

となる。 $\begin{pmatrix} *_{\vec{e}_2} \#_{\vec{e}_2} \\ *_{\vec{e}_3} \#_{\vec{e}_3} \end{pmatrix} \in O(2)$ となる。 $\begin{pmatrix} *_{\vec{e}_2} \#_{\vec{e}_2} \\ *_{\vec{e}_3} \#_{\vec{e}_3} \end{pmatrix}$

固有値は 1 と 1 となる。 $\begin{pmatrix} *_{\vec{e}_2} \#_{\vec{e}_2} \\ *_{\vec{e}_3} \#_{\vec{e}_3} \end{pmatrix} = I_2$ となる。 実際

$\det \begin{pmatrix} *_{\vec{e}_2} \#_{\vec{e}_2} \\ *_{\vec{e}_3} \#_{\vec{e}_3} \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$ となる。 $\begin{pmatrix} *_{\vec{e}_2} \#_{\vec{e}_2} \\ *_{\vec{e}_3} \#_{\vec{e}_3} \end{pmatrix}$ の固有値は 1 と 1 となる。

(2) (i) $\begin{pmatrix} *_{\vec{e}_2} \#_{\vec{e}_2} \\ *_{\vec{e}_3} \#_{\vec{e}_3} \end{pmatrix} \in SO(2)$ となる。

$\det(\rho Q \rho Q) = -1$ $\begin{vmatrix} *_{\vec{e}_2} \#_{\vec{e}_2} \\ *_{\vec{e}_3} \#_{\vec{e}_3} \end{vmatrix}$

$\det(\rho) = -1$

かつ $\begin{vmatrix} *_{\vec{e}_2} \#_{\vec{e}_2} \\ *_{\vec{e}_3} \#_{\vec{e}_3} \end{vmatrix} = 1$ となる。

$$\begin{pmatrix} *_2 \#_2 \\ *_3 \#_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \text{Th}(1) \neq \mathbb{R}.$$

⑧