

I $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ とし、 $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i \neq j$) とし、

$$A \vec{p}_j = \alpha_j \vec{p}_j, \vec{p}_j \neq \vec{0} \quad (j=1, \dots, n) \text{ かつ成り立つ } \vec{p}_j \in \mathbb{K}^n$$

$$\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \text{ が LI}$$

$\mathbb{K}^n$ の基底 $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ を示す。 $\mathbb{K}^n$ の基底 $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ を示す。

II $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{K})$ の 1 次形式 $\vec{p}_j$ を示す。

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + * - |A|$$

$*$ は $\mathbb{K}$ の元を示す。

$$(1) \vec{p}_j = \vec{e}_j \quad |\lambda \vec{e}_1 - \vec{a}_1, \lambda \vec{e}_2 - \vec{a}_2, \lambda \vec{e}_3 - \vec{a}_3| = \dots$$

と示す。

$$(2) \vec{p}_j = \vec{e}_j \quad \lambda \text{ の関数として } \frac{d}{d\lambda} |\lambda \vec{e}_1 - \vec{a}_1, \lambda \vec{e}_2 - \vec{a}_2, \lambda \vec{e}_3 - \vec{a}_3| = ?$$

を示す。

III $A \in M_2(\mathbb{R})$ の 2 次形式 $\vec{p}_j$ は正定値と示す。

A は正定値 $\vec{p}_j$ A^T の 2 次形式 $\vec{p}_j$ は正定値 $\vec{p}_j$ と示す。

を示す。

I $\lambda = 1$ のとき $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ なる λ に対して $c_1 \vec{p}_1 = \vec{0}$ ならば $c_1 = 0$ となる。成立し得る。
 $\lambda = 1$ のとき $0 \neq \lambda$ とし得る。

$$(*) \quad c_1 \vec{p}_1 + \dots + c_{\ell-1} \vec{p}_{\ell-1} + c_{\ell} \vec{p}_{\ell} = \vec{0}$$

とすると $(*)$ の両辺に $A - \alpha_{\ell} I_n$ をかけると

$$(A - \alpha_{\ell} I_n) \vec{p}_{\ell} = \vec{0}, \quad j \neq \ell \text{ のとき } (A - \alpha_{\ell} I_n) \vec{p}_j = (\alpha_j - \alpha_{\ell}) \vec{p}_j$$

なる。

$$c_1 (\alpha_1 - \alpha_{\ell}) \vec{p}_1 + \dots + c_{\ell-1} (\alpha_{\ell-1} - \alpha_{\ell}) \vec{p}_{\ell-1} = \vec{0}$$

なる。係数 0 となる。係数 0 となる。

$$c_1 (\alpha_1 - \alpha_{\ell}) = \dots = c_{\ell-1} (\alpha_{\ell-1} - \alpha_{\ell}) = 0$$

と仮定する。 $\alpha_j - \alpha_{\ell} \neq 0$ ($j = 1, \dots, \ell-1$) ならば

$$c_1 = \dots = c_{\ell-1} = 0$$

これより $(*)$ には $c_{\ell} \vec{p}_{\ell} = \vec{0}$ と仮定する。 $\vec{p}_{\ell} \neq \vec{0}$ ならば $c_{\ell} = 0$ と仮定する。

問題 $\alpha_j \in \mathbb{K}, \alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j), A \in M_n(\mathbb{K})$ とする。

$$\vec{p}_j \in V(\alpha_j), \quad \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_{\ell} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 = \dots = \vec{p}_{\ell} = \vec{0}$$

2" 仮定 = 0 と仮定し得る。

(3)

$$\frac{d}{d\lambda} \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & 1 & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (a_{22} + a_{33})\lambda + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \lambda^2 - (a_{11} + a_{33})\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\text{かゝる } * = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

かゝる通り.

A が正定値 $\Leftrightarrow a_{ii} > 0, |A| > 0$

(4)

なお $|A| \neq 0$ から A は正則。

$X = A^{-1}$ とすると

$$AX = I_3. \text{ 両辺の逆をとると } {}^t X {}^t A = {}^t X A = I_3$$

$$XA = I_3 \text{ 両辺の逆をとると } {}^t A {}^t X = A {}^t X = I_3.$$

${}^t X = A^{-1} = X$ から $A^{-1} = X$ は両辺逆と一致。

161 より一般に $A \in M_n(\mathbb{K})$ が正則なとき

$${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$$

であることを示す。

$n=2$ に限定して A^{-1} が正定値であることを示す。

$\exists R \in O(2)$ により

$$R^{-1} A R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ かつ } \alpha, \beta > 0 \text{ と表す.}$$

この両辺の逆行列は

$$R^{-1} A^{-1} R = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \text{ と表す.}$$

$$\bar{\Phi}_{A^{-1}}(\lambda) = \bar{\Phi}_{R^{-1} A^{-1} R}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda - \beta^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \alpha^{-1})(\lambda - \beta^{-1})$$

から A^{-1} の固有値 $\alpha^{-1}, \beta^{-1} > 0$ であり、 A^{-1} が定める二次形式は正定値であることを示す。