

(1) $|A| = 10 \neq 0$ であるから A は $\mathbb{R}^3$ の基底である。 (基底であることを示す)*

I (2) $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より $a_{ij} (\vec{a}_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ であるから a_{11}, a_{12}, a_{13} は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ の基底である。

① a_{11}, a_{12}, a_{13} は A の行ベクトルであるから $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ の基底である。

II (1) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ とおくと

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

とわかる。 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は LI であるから $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{c} = \vec{0}$ となる $\vec{c}$ は $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

より $\vec{c} = \vec{0}$ である。よって $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である。

(2) $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ は

* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であるから $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は LI, (2) $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \vec{v} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + c_3 \vec{a}_3$ と書ける。 (a) (1), (2) の基底である。

$$\text{III } (\vec{x}, {}^t A \vec{y}) = (\vec{x}, A \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \implies (\vec{x}, ({}^t A - A) \vec{y}) = 0 \quad \forall \vec{x}$$

(3)

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \text{ なる } \vec{x} \text{ がある } \implies ({}^t A - A) \vec{y} = \vec{0} \quad \forall \vec{y}$$

$$\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \text{ なる } \vec{y} \text{ がある } \implies {}^t A - A = \mathbf{0}_3, \text{ i.e. } {}^t A = A$$

all $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.