

I $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ といふ。

(1) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ かつ $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示しなさい。

(2) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ の双対基底 $a_1^1, a_1^2, a_1^3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ を求めなさい。

II $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底といふ。 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ の双対基底を a_1^1, a_1^2, a_1^3 といふ。 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ は

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

により定めらる。 (1) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ かつ $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示しなさい。

(2) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ の双対基底を $b_1^1, b_1^2, b_1^3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ とすると

b_1^1, b_1^2, b_1^3 は a_1^1, a_1^2, a_1^3 で表わしなさい。

(3) x^1, x^2, x^3 は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ によって定めらる $\mathbb{R}^3$ の座標といふ。

y^1, y^2, y^3 は $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

x^i は y^j で表わしなさい。 y^j は x^i で表わしなさい。

(4) ξ_1, ξ_2, ξ_3 は a_1^1, a_1^2, a_1^3 によって定めらる座標といふ。

η_1, η_2, η_3 は b_1^1, b_1^2, b_1^3

ξ_i は η_j で表わしなさい。 η_j は ξ_i で表わしなさい。

III $A \in M_3(\mathbb{R})$ といふ。

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3)$$

かつ成り立つならば A は対称行列であることを示しなさい。