

I 例 " $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ について $\|\vec{z}\|^2 := (\vec{z}, \vec{z})$ とおくと ①

$$\|\vec{z}\|^2 = 0 \iff \vec{z} = \vec{0}$$

次に成り立つことは $\vec{z} \in \mathbb{C}^l, \vec{w} \in \mathbb{C}^m$ について (証明は?)

$$(AB\vec{z}, \vec{w}) = (\vec{z}, (AB)^*\vec{w})$$

$$(AB\vec{z}, \vec{w}) = (B\vec{z}, A^*\vec{w}) = (\vec{z}, B^*A^*\vec{w})$$

よって

$$(\vec{z}, (AB)^*\vec{w}) = (\vec{z}, B^*A^*\vec{w})$$

$$\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^l \quad (\vec{z}, \vec{z}') = 0 \implies \vec{z}' = \vec{0}$$

$$\text{よって} \quad (AB)^*\vec{w} = B^*A^*\vec{w}$$

$$\text{よって} \quad \vec{w} \in \mathbb{C}^m \text{ に対して } (AB)^* = B^*A^*$$

例 2

II

$$C \in M_{m,n}(\mathbb{C}) \text{ について}$$

$$C\vec{w} = \vec{0} \quad (\forall \vec{w} \in \mathbb{C}^n) \implies C = 0_{m,n}$$

$$\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}$$

例 3

$$(AB)^* = {}^t(\overline{AB}) = {}^t\bar{B} {}^t\bar{A} = B^*A^*$$

(2)

III. $\vec{x} \in \mathbb{R}^l, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ について

$$(AB\vec{x}, \vec{y}) = (B\vec{x}, {}^tA\vec{y}) = (\vec{x}, {}^tB {}^tA\vec{y})$$

$$(AB\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t(AB)\vec{y})$$

よって 従って

$$(\vec{x}, {}^tB {}^tA\vec{y}) = (\vec{x}, {}^t(AB)\vec{y})$$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^l$ について $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_2, \vec{x}_1)$
 $\Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$

よって ${}^tB {}^tA\vec{y} = {}^t(AB)\vec{y}$

$P, Q \in M_{m,l}(\mathbb{R})$ について $P\vec{y} = Q\vec{y} \quad (\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^l)$

ならば $P = Q$ である

$${}^tB {}^tA = {}^t(AB)$$

よって

IV 前提とある定理は以下2つある。

3

定理1 $A \in M_2(\mathbb{R})$, ${}^t A = A$ とあると

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ と } \alpha \neq \beta.$$

2) 1) にあてはまる $\alpha = \beta \Rightarrow A = \alpha I_2$

定理2 $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^t A = A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, \quad A\vec{q} = \beta\vec{q} \Rightarrow (\vec{p}, \vec{q}) = 0.$$

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ と } \alpha \neq \beta.$$

$\alpha = \beta$ のとき $A = \alpha I_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ となる。 $R = I_2$ とおけばよい。

$\alpha \neq \beta$ のとき $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \vec{p}_1 \neq \vec{0}, A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \vec{p}_2 \neq \vec{0}$ ①

2つある $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in \mathbb{R}^2$ が存在する。 $\vec{p}_i \neq \vec{0}$ となる $\vec{q}_i = \frac{1}{\|\vec{p}_i\|} \vec{p}_i$

とすると, $\|\vec{q}_i\| = 1$ ($i = 1, 2$)。定理2より $(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$ と

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \frac{1}{\|\vec{p}_1\| \cdot \|\vec{p}_2\|} (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

から $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ は正規直交基底となり, $(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \in O(2)$ とする。

① から $A \cdot \frac{1}{\|\vec{p}_1\|} \vec{p}_1 = \frac{1}{\|\vec{p}_1\|} A\vec{p}_1 = \frac{\alpha}{\|\vec{p}_1\|} \vec{p}_1 = \alpha \vec{q}_1$

$$A\vec{q}_2 = A \cdot \frac{1}{\|\vec{p}_2\|} \vec{p}_2 = \frac{1}{\|\vec{p}_2\|} A\vec{p}_2 = \frac{1}{\|\vec{p}_2\|} \beta \vec{p}_2 = \beta \vec{q}_2$$

とすると

$$A(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = (A\vec{q}_1, A\vec{q}_2) = (\alpha\vec{q}_1, \beta\vec{q}_2) = (\vec{q}_1, \vec{q}_2) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

とすると $|\vec{q}_1, \vec{q}_2| = 1$ のとき $R = (\vec{q}_1, \vec{q}_2)$ と $RESO(3)$ と $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$|\vec{q}_1, \vec{q}_2| = -1$ のときは $R = (\vec{q}_1, -\vec{q}_2)$ とすると $|R| = 1$ とする

$${}^t R R = \begin{pmatrix} {}^t \vec{q}_1 \\ {}^t (-\vec{q}_2) \end{pmatrix} (\vec{q}_1, \vec{q}_2) = \begin{pmatrix} \|\vec{q}_1\|^2 - (\vec{q}_1, \vec{q}_2) \\ -(\vec{q}_2, \vec{q}_1) \|\vec{q}_2\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

${}^t (\vec{q}_1, \vec{q}_2) (\vec{q}_1, \vec{q}_2) = I_2$ から $|\vec{q}_1, \vec{q}_2|^2 = 1$ 従って $|\vec{q}_1, \vec{q}_2| = \pm 1$

∴ $R \in O(2)$ (従, $\sim R \in SO(2)$ とする).

(4)

$$\begin{aligned} AR &= (A\vec{r}_1, A\vec{r}_2) = (A\vec{g}_1 - A\vec{g}_2) = (\alpha\vec{g}_1 - \beta\vec{g}_2) \\ &= (\vec{g}_1, \vec{g}_2) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

∴ $R^T AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}.$

V. $\otimes \Rightarrow$ $\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n, \forall \vec{w} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(\cup \vec{z}, \cup \vec{w}) = (\vec{z}, \cup^* \cup \vec{w}) \stackrel{(*)}{=} (\vec{z}, \vec{w})$$

$\otimes \Leftarrow$

$$(\cup \vec{z}, \cup \vec{w}) = (\vec{z}, \cup^* \cup \vec{w}) = (\vec{z}, \vec{w})$$

∴

$$(\vec{z}, (\cup^* \cup - I_n) \vec{w}) = 0$$

∴ $\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n, \forall \vec{w} \in \mathbb{C}^n$ に対して成り立つ。

- 同様に $(\vec{z}, \vec{p}) = 0 \quad (\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n) \Rightarrow \vec{p} = \vec{0}$

∴ 成り立つ。実際、 $\vec{z} = \vec{p}$ とすれば $\|\vec{p}\|^2 = 0$ ∴ $\vec{p} = \vec{0}$ となる。

∴ $\vec{w}$ に対して $(\cup^* \cup - I_n) \vec{w} = \vec{0}$ となり得る。

- 同様に $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ に対して $A\vec{z} = \vec{0} \quad (\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n) \Rightarrow A = \mathbf{0}_{m,n}$

∴ 成り立つ。実際 $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ に対して $\vec{z} = \vec{e}_j$ とすれば $\vec{a}_j = \vec{0}$ となる。

∴ $\vec{w}$ に対して $\cup^* \cup - I_n = \mathbf{0}_n$, i.e. $\cup^* \cup = I_n$ となり得る。

- 同様に $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $(A\vec{z} = \vec{0} \Rightarrow \vec{z} = \vec{0}) \Leftrightarrow A$ は正則

∴ 成り立つ。 $\cup \vec{z} = \vec{0}$ とすれば $\vec{0} = \cup^* \cup \vec{z} = I_n \vec{z} = \vec{z}$ ∴ $\cup$ は正則である。
 $\cup^* \cup = I_n$ ∴ $\cup^* = \cup^{-1}$, 従って $\underline{\cup \cup^* = \cup \cup^{-1} = I_n}$ も成り立つ。

V1 $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} = A$ かつ A は
 $\pm 1, -1$ の固有値である。

(5)

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1+i \\ -1-i & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2) - 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4) \end{aligned}$$

かつ A の固有値は $\lambda=1, 4$ である。したがって固有空間は

$\lambda=1$ のとき $A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1+i \\ -1-i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow -(1+i)z_1 - z_2 = 0$
 $\textcircled{*}$

かつ $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ -(1+i)z_1 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} \quad (z_1 \neq 0)$

また固有空間 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ -(1+i)z_1 \end{pmatrix}$ は $(1-i)(-1-i) = (-2-1-i)$
 の逆行列である。

$\lambda=4$ のとき $A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ -1-i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow z_1 - (1-i)z_2 = 0$

かつ $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i)z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_2 \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z_2 \neq 0)$

以上より固有空間は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

$\lambda=1$ のとき $\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$ $\lambda=4$ のとき $\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$

とすると

$$(\vec{p}, \vec{q}) = 1 \cdot \overline{(1-i)} + (-1-i) \cdot 1 = 1+i+(-1-i) = 0$$

である。 $U = (\vec{p} \ \vec{q})$ は unitary である。 $\textcircled{=}$

⑤ $U = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad U^* = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \\ \vec{u}_2^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$

$$U^* U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \vec{u}_1 & \vec{u}_1^* \vec{u}_2 \\ \vec{u}_2^* \vec{u}_1 & \vec{u}_2^* \vec{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{u}_1, \vec{u}_1) & (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \\ (\vec{u}_2, \vec{u}_1) & (\vec{u}_2, \vec{u}_2) \end{pmatrix}$$

எனவே $\|\vec{u}_1\|^2 = \|\vec{u}_2\|^2 = 1, \quad (\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$

எனவே $(\vec{u}_2, \vec{u}_1) = \overline{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)} = 0$ எனவே $U^* U = I_2$

எனவே U is unitary 2×2 .

VII

(7)

$P \in O(2) \Leftrightarrow$

$${}^t P P = I_2 \Leftrightarrow$$

$${}^t P P = P {}^t P = I_2$$

$$\Leftrightarrow (P \vec{u}, P \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2)$$

$$\Leftrightarrow P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2) \text{ a.e.}$$

$$\|\vec{p}_1\|^2 = \|\vec{p}_2\|^2 = 1, (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \|P \vec{u}\| = \|\vec{u}\| \quad (\vec{u} \in \mathbb{R}^2)$$

$$① \quad {}^t (PQ) PQ = {}^t Q ({}^t P P) Q = {}^t Q I_2 Q = {}^t Q Q = I_2$$

$$② \quad (PQ \vec{u}, PQ \vec{v}) = (Q \vec{u}, Q \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$$

$$③ \quad R = PQ = (\vec{r}_1, \vec{r}_2) \text{ a.e.}$$

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (P \vec{e}_1, P \vec{e}_2) \text{ a.e.}$$

$$\|\vec{r}_1\| = \|P \vec{e}_1\| = \|\vec{e}_1\| = 1, \quad \|\vec{r}_2\| = \|P \vec{e}_2\| = \|\vec{e}_2\| = 1$$

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (P \vec{e}_1, P \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$$

$$① \quad {}^t P P = I_2 \text{ a.e.} \quad \underline{P \text{ is invertible}} \quad P^{-1} = {}^t P \text{ a.e.}$$

$${}^t ({}^t P) {}^t P = P {}^t P = I_2 \text{ a.e.} \quad {}^t P = P^{-1} \text{ a.e.}$$

VIII $P \in SO(2) \Leftrightarrow |P| = 1 \text{ a.e.} \quad P \in O(2)$

$$P, Q \in SO(2) \text{ a.e.} \quad P, Q \in O(2) \text{ a.e.} \quad PQ \in O(2) \quad (\text{from VII})$$

$$|PQ| = |P| \cdot |Q| = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{a.e.} \quad PQ \in SO(2)$$

$$P \in SO(2) \text{ a.e.} \quad P \in O(2) \text{ a.e.} \quad P^{-1} \in O(2)$$

$$|P^{-1}| = \frac{1}{|P|} = \frac{1}{1} = 1 \text{ a.e.} \quad P^{-1} \in SO(2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \quad 1 \leq a, b, c \leq 1$$

1 X (i) $(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \geq 0 \quad (\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2)$

(ii) $a, b \geq 0, |A| \geq 0$

(iii) $\exists T \in GL_2(\mathbb{R}) \quad \alpha, \beta \geq 0$

(i) $\Rightarrow$ (iii) $\exists R \in O_2 \quad R^{-1} A R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$$(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \alpha x^2 + \beta y^2$$

$\exists T \in GL_2, T = T^{-1} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r}_1 \in \mathbb{R}^2 \quad A \vec{r}_1 = \alpha \vec{r}_1 \quad \text{etc.}$

$0 \leq (A \vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha \|\vec{r}_1\|^2 = \alpha$

$0 \leq (A \vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta \|\vec{r}_2\|^2 = \beta$

∴ (iii) $\Rightarrow$ (i) $\alpha, \beta \geq 0$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

$\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow (A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \geq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\alpha + \beta \geq 0, \alpha \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha, \beta \geq 0$ (問題 X (2))

$0 \leq |A| = \alpha \beta, \quad \chi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = \lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + |A|$

$\Rightarrow \alpha + \beta = \alpha + b \geq 0 \quad \alpha, \beta \geq 0 \in \mathbb{R}$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow |A| = \alpha \beta \geq 0$

$a, b \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 0, ab \geq 0$

$a + b = \alpha + \beta \geq 0, \quad ab \geq ab - c^2 = |A| \geq 0$

∴ (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

X (1) $a \neq 0$ ならば $a > 0$ OR $a < 0$.
 $a > 0$ ならば $e > 0$, $a < 0$ ならば $e < 0$.
 $a < 0$, $e < 0$ ならば $a + e < 0$ であり $a + e > 0$ ではない。
 したがって $a > 0, e > 0$ が必要。

(2) $a \neq 0$ ならば (1) の条件を満たす
 必要十分条件は $(a > 0, e > 0)$ OR $(a < 0, e < 0)$
 である。 $a < 0, e < 0$ ならば $a + e < 0$ であり
 $a + e \geq 0$ ではない。 したがって $a > 0, e > 0$ が必要、 $a \geq 0, e \geq 0$

$a = 0$ ならば $e \geq 0$ である。 あるいは $a \geq 0, e \geq 0$
 $e = 0$ ならば $a \geq 0$ ————— $a \geq 0, e \geq 0$