

L11 V $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とあるとき $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

と解り、行列標準形、とある2 行列を用いる。
(解答は L11 に λ と μ あり)

I $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), B \in M_{n,l}(\mathbb{C})$ とある。

$$(A\vec{z}, \vec{w}) = (\vec{z}, A^* \vec{w}) \quad (\vec{z} \in \mathbb{C}^n, \vec{w} \in \mathbb{C}^m)$$

が成り立つことを示す。

$$(AB)^* = B^* A^*$$

を示す。

II $\vec{z} = \vec{z}'$ と置き $(AB)^* = B^* A^*$ と置く。
右辺に $\vec{z}'$ の性質を用いる。

III (練習) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ とある

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t A \vec{y}), \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m)$$

と示す ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$

を示す。

IV 行列 A に対して定理を用いる

$A \in M_2(\mathbb{R}), {}^t A = A$ とある $\exists R \in SO(2)$ 同値行列
が存在し

$$R^{-1} A R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化できることを示す。

V $U \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ unitary 2 次 $\mathbb{C}$ 上の

$$UU^* = U^*U = I_2 \quad (*)$$

2 次 $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$ 上の

$$(*) \Leftrightarrow (U\vec{z}, U\vec{w}) = (\vec{z}, \vec{w}) \quad (\forall \vec{z}, \forall \vec{w} \in \mathbb{C}^2)$$

$\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$ 上の

VI $A = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$ 2×2 行列 A は 2 次 $\mathbb{C}$ 上の

unitary 行列 2 次 $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$ 上の

VII $P, Q \in O(2)$ $A \in \mathbb{R}$ $PQ \in O(2)$, $P^T \in O(2)$

$\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$ 上の

VIII $P, Q \in SO(2)$ $A \in \mathbb{R}$ $PQ \in SO(2)$, $P^T \in SO(2)$

$\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C}$ 上の

行列 A は 2 次 $\mathbb{C}$ 上の

IX $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ 2×2 行列 A は 2 次 $\mathbb{C}$ 上の

$$(*) (A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \geq 0 \quad (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

A の固有値 α, β は

$$(*) \Leftrightarrow a, b \geq 0, |A| \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha, \beta \geq 0 \end{cases}$$

X $a, b \in \mathbb{R}$ $a, b > 0$ $\Rightarrow a, b > 0$

(1) $a, b, a+b > 0 \Rightarrow a, b > 0$

(2) $a, b, a+b \geq 0 \Rightarrow a, b \geq 0$