

I $M_2(\mathbb{K}) \ni A, B$ に対して

$$A \sim B \iff \exists P \in M_2(\mathbb{K}) \text{ 正則}, P^{-1}AP = B$$

が同値関係であることを示す

II X 上の同値関係 $\sim$ に対して $x \in X$ とき

$$[x] := \{ y \in X; x \sim y \}$$

と定める。 $x, x' \in X$ に対して

$$[x] \neq [x'] \Rightarrow [x] \cap [x'] = \emptyset$$

を示す

III $16\mathbb{Z} := \{ 16y \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \}$ とする。 $x, x' \in \mathbb{Z}$ に対して

$$x - x' \in 16\mathbb{Z} \iff x \sim x'$$

とすると $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示す。

IV $A \in M_2(\mathbb{R})$ かつ $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \bar{\alpha})$, $\alpha \notin \mathbb{R}$ とする。 $\mathbb{C}$ 上の

$$A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$$\text{とすると} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

と実部 $\vec{x}$, 虚部 $\vec{y}$ と定める。 $\vec{x} \neq \vec{y}$ を示す。

ε=1 1) $\alpha \neq \bar{\alpha}$ なる $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$ は存在しない。

2) $\vec{x}, \vec{y}$ は $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$ と仮定する。

$$V \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ とあるとき } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Σ 証明 1) 常微分方程式, Σ 式 (2) を用いて Σ 示す.

$$VI \quad A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), B \in M_{n,l}(\mathbb{C}) \text{ とある.}$$

$$(A\vec{z}, \vec{w}) = (\vec{z}, A^* \vec{w}) \quad (\vec{z} \in \mathbb{C}^n, \vec{w} \in \mathbb{C}^m)$$

かゝる Σ 示す = Σ 証明 1)

$$(AB)^* = B^* A^*$$

Σ 示す.

$$VII \quad VI \text{ に } \vec{z} = \vec{0} \text{ と置き } (AB)^* = B^* A^* \text{ Σ 示す}$$

Σ 証明 1) $\vec{0} \cdot (\cdot)$ の性質は Σ 証明 1) 参照.

$$VIII \text{ (練習)} \quad A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B \in M_{n,l}(\mathbb{R}) \text{ とある}$$

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t A \vec{y}), \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m)$$

$$\Sigma \text{ 証明 1) } {}^t(AB) = {}^t B {}^t A$$

Σ 示す.

XI 3 行 2 列 1 行 2 列 定理 Σ 証明 1)

$$A \in M_2(\mathbb{R}), {}^t A = A \text{ であるとき } \exists R \in SO(2) \text{ 同値変換あり}$$

かゝる Σ 存在 1)

$$R^{-1} A R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と相似変換 2) 存在 Σ 示す.