

I i) $A \sim A$ 12

$$I_2^{-1} A I_2 = I_2 A I_2 = A$$

①

ii) $A \sim B$ 22

$$P^{-1} A P = B \text{ 22 } B \text{ 22 } B \in M_2(\mathbb{K})$$

1111 12 22. P, P^{-1} 22

$$P B P^{-1} = A \text{ 22 } (P^{-1})^{-1} = P \text{ 22}$$

$$(P^{-1})^{-1} B P^{-1} = A \text{ 22 } B \sim A$$

iii) $A \sim B, B \sim C$ 22

$$P_1^{-1} A P_1 = B, P_2^{-1} B P_2 = C \text{ 22}$$

$$P_2 P_1 \text{ 22 } (P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \text{ 22}$$

$$P_1^{-1} P_2^{-1} A P_2 P_1 = C \text{ 22}$$

$$(P_2 P_1)^{-1} A P_2 P_1 = C$$

$$A \sim C$$

II 1111 $[x] \cap [x'] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [x']$ 22

$\exists y \in [x] \text{ 22 } y \in [x'] \text{ 22 } x \sim y, x' \sim y \text{ 22}$

$\forall z \in [x] \text{ 22 } x \sim z$

$= x \sim z, x \sim y, y \sim x' \text{ 22 } x \sim x' \text{ 22}$

$x \sim z, x' \sim x \text{ 22 } x' \sim z \text{ 22 } z \in [x']$

22 $[x] \subset [x'], [x'] \subset [x] \text{ 22 } [x] = [x']$

$$[x] = [x']$$

22

III

(2)

i) $x - x = 0 = 16 \cdot 0 \in 16\mathbb{Z}$ သို့ $x \sim x$.

ii) $x \sim x' \in \mathbb{Z}$ ဖြစ်ပြီး $x - x' = 16y$ ဖြစ်ပြီး $y \in \mathbb{Z}$ ဖြစ်ပြီး

$$y = 0 \Rightarrow x = x'$$

$$x' - x = 16(-y) \in 16\mathbb{Z}$$

သို့ $x' \sim x$.

iii) $x \sim x', x' \sim x'' \in \mathbb{Z}$

$$x - x' = 16y_1, \quad x' - x'' = 16y_2$$

$$\exists \frac{m}{16} \text{ ဖြစ်ပြီး } y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \text{ ဖြစ်ပြီး } y_1 + y_2 \text{ ဖြစ်ပြီး}$$

$$x - x'' = (x - x') + (x' - x'') = 16y_1 + 16y_2$$

$$= 16(y_1 + y_2) \in 16\mathbb{Z}$$

သို့ $x \sim x''$ ဖြစ်ပြီး

(3)

IV $\alpha = a + ib, b \neq 0$ かつ $\bar{\alpha} = a - ib$ かつ $\alpha \neq \bar{\alpha}$ かつ $\alpha \neq 0$

1つ z
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

かつ
$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}$$

かつ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \vec{0} &= c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

かつ
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \dots (*)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \neq 0 \text{ かつ } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \text{ は可逆}.$$

(*) かつ $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$ かつ $\vec{0}$ ではない。

V A の固有値 λ は $\lambda = \pm i$ である

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 2 = \lambda^2 + 1$$

かつ A の固有値は $\lambda = \pm i$

$\lambda = i$ のとき $A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i - 1 & -2 \\ 1 & i + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \dots (*)$

$$(i - 1)(1 \ i + 1) = (i - 1 \ -2) \text{ かつ } i$$

(*) $\Leftrightarrow z_1 + (i + 1)z_2 = 0$

かつ $z_2 \neq 0$ かつ $z_1 = -(i + 1)z_2$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(i + 1)z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_2 \begin{pmatrix} -i - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z_2 \neq 0)$$

(4)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とあるから

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

より

$$A \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

とある。 = a とある。

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= A \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} i \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} + \frac{1}{2} (-i) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A \frac{1}{2i} \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2i} A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2i} A \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} i \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} - \frac{(-i)}{2i} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } P &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \text{ とすると } AP = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とある。 P は可逆行列だから $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とある。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

とある。 $P^{-1} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$ とある。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} A P \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$$

とある。

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \text{ is orthogonal} = \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

is orthogonal

$$\frac{d}{dt} X(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

is orthogonal

$$\left(X(-t) \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} \right)'$$

$$= \frac{d}{dt} X(-t) \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} + X(-t) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= -X(-t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} + X(-t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= 0_2 \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{d's } X(-t) \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = X(0) \begin{pmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{pmatrix}$$

$$X(-t) X(t) = X(t) X(-t) = I_2 \text{ d's}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = X(t) \begin{pmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{pmatrix} = X(t) P^{-1} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix}$$

||

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{d's } \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = P X(t) P^{-1} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix}$$

is orthogonal

$v_I, v_{II}, v_{III}, \dots, v_{IX} = \sum_{i=1}^9 L_{12-1030} = 10 L_7 J$