

I $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ とすると $B \neq O_2 \iff \vec{e}_1 \neq \vec{0} \text{ OR } \vec{e}_2 \neq \vec{0}$

$\vec{e}_1 \neq \vec{0}$ のとき $B \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \neq \vec{0}$

$\vec{e}_2 \neq \vec{0}$ のとき $B \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \neq \vec{0}$

から $\exists \vec{p} \in \mathbb{K}^2$ $B \vec{p} \neq \vec{0}$ が成り立つ。

一般に $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ $B \neq O_{m,n} \implies \exists \vec{p} \in \mathbb{K}^n$ $B \vec{p} \neq \vec{0}$
 $B \vec{e}_j = \vec{e}_j$ (B の j 列が $\vec{e}_j$) から成り立つ。

II $c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 = \vec{0}$ とすると $(A - \alpha I_2) \cdot$ とすると

$(A - \alpha I_2)(c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2) = c_1 (A - \alpha I_2) \vec{p}_1 + c_2 (A - \alpha I_2) \vec{p}_2$
 $= c_1 \vec{p}_2 + c_2 \vec{0} = c_1 \vec{p}_2 = \vec{0}$

したがって $\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$. ①に代入すると $c_2 \vec{p}_2 = \vec{0}$. $\vec{p}_2 \neq \vec{0}$
 から $c_2 = 0$

III $(e^{-5t} \eta(t))' = -5e^{-5t} \eta(t) + e^{-5t} \eta'(t)$
 $= -5e^{-5t} \eta(t) + e^{-5t} (5\eta(t) + C e^{5t})$
 $= C$

従って $e^{-5t} \eta(t) = Ct + C_0$ (C_0 は定数)

$t=0$ を代入して $\eta(0) = C_0$ となる。

$\eta(t) = C t e^{5t} + \eta(0) e^{5t}$

2" あり = とが分かる。

補足

講義中の

$$z'(t) = 5z(t) + \xi(0)e^{5t} \quad \text{for } C = \xi(0) \text{ なる}$$

(2)

$$z(t) = \xi(0)te^{5t} + z(0)e^{5t}$$

とすると

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ te^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ te^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ te^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

2" 変数 = 2 変数 になる。

(3)

$$\text{IV } f(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{R} \quad (j=0, \dots, m)$$

$$\text{と仮定} \quad f(\alpha) = 0 \text{ かつ}$$

$$f(\alpha) = a_m \alpha^m + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad \dots (*)$$

$$\overline{a_j} = a_j, \quad \overline{\alpha^j} = (\overline{\alpha})^j \text{ かつ } (*) \text{ の両辺の複素共役を取ると}$$

$$\overline{f(\alpha)} = a_m (\overline{\alpha})^m + \dots + a_1 \overline{\alpha} + a_0 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad f(\overline{\alpha}) = 0 \text{ である。}$$