

I F^{-1} の定義域 $\mathbb{K}^n$ から $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ を任意にとります. $\Rightarrow$ F が全単射
 なの2° $\vec{s}, \vec{t} \in \mathbb{K}^n$ から一意に存在して

$$F(\vec{s}) = \vec{x}, F(\vec{t}) = \vec{y}$$

が成立します. $\Rightarrow$ $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ に対して

$$F(\lambda \vec{s} + \mu \vec{t}) = \lambda F(\vec{s}) + \mu F(\vec{t}) = \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$$

$\uparrow$
 F は線形型

が従います. $\Rightarrow$ れは

$$F^{-1}(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda \vec{s} + \mu \vec{t} = \lambda F^{-1}(\vec{x}) + \mu F^{-1}(\vec{y})$$

$\Rightarrow$ 意味するの2° F^{-1} が線形型であることを分かりました. 一般に

$$G: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

の線形型写像は $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ に対して

$$G = F_B$$

となるので、

$$F^{-1} = F_B$$

となります.

補足

$$F^{-1} \circ F = \text{Id}_{\mathbb{K}^n} = F_{I_n}$$

±5に

$$F^{-1} \circ F = F_B \circ F_A = F_{BA}$$

±7の2°

$$\underline{BA = I_n.} \quad \text{④ } \vec{b}$$

$$F \circ F^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{K}^n} = F_{I_n}$$

$$F \circ F^{-1} = F_A \circ F_B = F_{AB}$$

か5

$$\underline{AB = I_n} \quad \text{⑤, ⑥} \quad B = A^{-1} \text{ となります.}$$

$$\text{II} \quad P = (\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n), Q = (\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n), \vec{p}_j, \vec{q}_j \in \mathbb{K}^m \text{ et } \mathbb{K} \neq \mathbb{J}.$$

$$\begin{aligned} (P+Q) \vec{v} &= (\vec{p}_1 + \vec{q}_1, \dots, \vec{p}_n + \vec{q}_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= v_1 (\vec{p}_1 + \vec{q}_1) + \dots + v_n (\vec{p}_n + \vec{q}_n) \\ &= v_1 \vec{p}_1 + v_1 \vec{q}_1 + \dots + v_n \vec{p}_n + v_n \vec{q}_n \\ &= v_1 \vec{p}_1 + v_2 \vec{p}_2 + \dots + v_n \vec{p}_n + v_1 \vec{q}_1 + \dots + v_n \vec{q}_n \\ &= (\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n) \vec{v} + (\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n) \vec{v} \\ &= P \vec{v} + Q \vec{v} \end{aligned}$$

III

$$B = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_\ell), \vec{e}_j \in \mathbb{K}^n \text{ et } \mathbb{K} \neq \mathbb{J}.$$

$$\begin{aligned} (P+Q) B &= ((P+Q) \vec{e}_1, \dots, (P+Q) \vec{e}_\ell) \\ &\stackrel{\text{II}}{=} (P \vec{e}_1 + Q \vec{e}_1, \dots, P \vec{e}_\ell + Q \vec{e}_\ell) \\ &= (P \vec{e}_1, P \vec{e}_2, \dots, P \vec{e}_\ell) + (Q \vec{e}_1, \dots, Q \vec{e}_\ell) \\ &= PB + QB \end{aligned}$$

$$A(R+S) = A(\vec{r}_1 + \vec{s}_1, \dots, \vec{r}_\ell + \vec{s}_\ell)$$

$$= (A(\vec{r}_1 + \vec{s}_1), \dots, A(\vec{r}_\ell + \vec{s}_\ell))$$

$$= (A \vec{r}_1 + A \vec{s}_1, \dots, A \vec{r}_\ell + A \vec{s}_\ell)$$

$$= (A \vec{r}_1, \dots, A \vec{r}_\ell) + (A \vec{s}_1, \dots, A \vec{s}_\ell)$$

$$= AR + AS$$

$$\stackrel{\text{II}}{=}$$

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$$

$$a \in \mathbb{K}$$

$$A(\vec{x} + \vec{y})$$

$$= A\vec{x} + A\vec{y}$$

IV $\vec{p} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ には $\exists i, 1 \leq i \leq n$ かつ $p_i \neq 0$

(3)

$c\vec{p} = \begin{pmatrix} c p_1 \\ \vdots \\ c p_n \end{pmatrix} = \vec{0}$ かつ $c p_i = 0$ となる $c = 0$ である。

V 基底 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ を用いて

VI $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ とする。

$A(t)\vec{v}(t)$ の成分は $= \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) v_j(t)$

これを微分すると

$(A(t)\vec{v}(t))' = \sum_{j=1}^n a'_{ij}(t) v_j(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) v'_j(t)$

従って

$$\frac{d}{dt}(A(t)\vec{v}(t)) = \begin{pmatrix} a'_{11}(t)\vec{v}(t) + a_{11}(t)\frac{d}{dt}\vec{v}(t) \\ \vdots \\ a'_{n1}(t)\vec{v}(t) + a_{n1}(t)\frac{d}{dt}\vec{v}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a'_{11}(t)\vec{v}(t) \\ \vdots \\ a'_{n1}(t)\vec{v}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}(t)\frac{d}{dt}\vec{v}(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)\frac{d}{dt}\vec{v}(t) \end{pmatrix}$$

$$= A'(t)\vec{v}(t) + A(t)\frac{d}{dt}\vec{v}(t)$$

が従う。

(補)

$B(t) = (\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))$ とする。

$A(t)B(t) = (A(t)\vec{e}_1(t), \dots, A(t)\vec{e}_n(t))$

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = (A'(t)\vec{e}_1(t) + A(t)\frac{d}{dt}\vec{e}_1(t), \dots, A'(t)\vec{e}_n(t) + A(t)\frac{d}{dt}\vec{e}_n(t))$$

$$= (A'(t)\vec{e}_1(t), \dots, A'(t)\vec{e}_n(t)) + (A(t)\frac{d}{dt}\vec{e}_1(t), \dots, A(t)\frac{d}{dt}\vec{e}_n(t))$$

$$= A'(t)(\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t)) + A(t)(\frac{d}{dt}\vec{e}_1(t), \dots, \frac{d}{dt}\vec{e}_n(t))$$

$$= A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$