L06-0710 練習問題

I　$\vec{a}\in\mathbb{R}^n$ とします. $\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ に対して $(\vec{a},\vec{v})=0$ ならば

$\vec{a}=\vec{0}$ であることを示しましょう.

II　A: 実数値の m行n列の行列に対して

$$(A\vec{v},\vec{w})=(\vec{v},{}^tA\vec{w})\quad(\vec{v}\in\mathbb{R}^n,\ \vec{w}\in\mathbb{R}^m)$$

が成立します. (L06で解説) これを用いて

A: 実数値の m行n列の行列

B: ―――― n行l列の ――――

に対して

$${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$$

を示しましょう.

III　$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ とします. $V=L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$

とします. $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ のVへの直交射影 $\vec{v}_0$ を $A=(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)$ の

グラム行列を用いて求めましょう.

${}^tAA$

IV

IIIの $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ について考えます. $V_0=L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ とします. $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ に

対して $\vec{e}_2$ の V_0 への直交射影を求めましょう $B=(\vec{a}_1\,\vec{a}_2)$ のグラム

行列 ${}^tBB$ を用いること.

V. 問題IVをV_0の正規直交基底を用いて解きましょう.

VI III のVに対し正規直交基底を求めましょう.

VII $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ m行3列の実行列とします.

$${}^tA A \text{ が正則} \Leftrightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ は LI}$$

を示しましょう.

L06_0710 練習問題解答

I 1) $\vec{v} = \vec{e}_j$（標準単位ベクトル）のとき

$$0 = (\vec{a}, \vec{e}_j) = a_j \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

なので $\vec{a} = \vec{0}$

2) $\vec{v} = \vec{a}$ のとき $\|\vec{a}\|^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = 0$ から $\vec{a} = \vec{0}$ が従う。

II AB は m 行 l 列で $\vec{x} \in \mathbb{R}^l$ のとき $AB\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ です。
$y \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$(AB\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t(AB)\vec{y})$$

$$(AB\vec{x}, \vec{y}) = (B\vec{x}, {}^tA\vec{y}) = (\vec{x}, {}^tB\,{}^tA\vec{y})$$

から $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^l$ に対して

$$(\vec{x}, {}^t(AB)\vec{y}) = (\vec{x}, {}^tB\,{}^tA\vec{y})$$

が成立します。I から ${}^t(AB)\vec{y} = {}^tB\,{}^tA\vec{y}$ が $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ に対して成立しますから，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が従います。

III $\quad {}^tAA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, ${}^tA\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_0 \in \mathrm{Im}(A)$ ですから $\exists \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して $\vec{v}_0 = A\vec{x}_0$ となります.

$(\vec{v}_0 - \vec{e}_1, A\vec{x}) = 0 \quad (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3)$ が $\vec{v}_0 - \vec{e}_1 \perp \mathrm{Im}(A)$

から従います. $\vec{v}_0 = A\vec{x}_0$ を代入すると

$$0 = (A\vec{x}_0 - \vec{e}_1, A\vec{x}) = ({}^tAA\vec{x}_0 - {}^tA\vec{e}_1, \vec{x})$$

が任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して成立しますから

$${}^tAA\vec{x}_0 = {}^tA\vec{e}_1$$

となります.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1r \leftrightarrow 2r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3r += 1r \times (-1)]{2r += 1r \times (-4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & -7 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2r \leftrightarrow 3r} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{2r \times = (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[3r += 2r \times 11]{1r += 2r \times (-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3r \times = (-\frac{1}{18})]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{1r += 3r \times (-5) \\ 2r += 3r \times 1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

から $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ となります. これから

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

IV $\vec{e}_2$ の V_0 への直交射影を $\vec{w}_0 = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$ とおく。このとき $\forall \vec{v} \in V_0$ を

$\vec{v} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ と表わすと $\vec{w}_0 \in V_0$ で

$$\vec{w}_0 - \vec{e}_2 \in V \iff \left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} - \vec{e}_2,\ (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = 0 \quad \left(\forall \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

$$\iff \left({}^t(\vec{a}\ \vec{b})(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} - {}^t(\vec{a}\ \vec{b})\vec{e}_2,\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = 0 \quad \left(\forall \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

$$\iff {}^t(\vec{a}\ \vec{b})(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = {}^t(\vec{a}\ \vec{b})\vec{e}_2 \quad \cdots \circledast$$

$(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad (\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^2)$

$\iff \vec{x} = \vec{0}$

ここで

$${}^t(\vec{a}\ \vec{b})(\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$${}^t(\vec{a}\ \vec{b})\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

なので $\circledast \iff$

$$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-4\\ 5\end{pmatrix}$$

従って

$$\vec{w}_0 = -\frac{4}{11}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \frac{5}{11}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-4+5\\ 4+5\\ -4+0\\ -4+5\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}1\\ 9\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$$

V　$\vec{p}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{a}_1\|}\vec{a}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ とおくと $\|\vec{p}_1\| = 1$，$\vec{p}_1 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$

$\vec{a}_2$ の $\vec{a}_1$ 方向への直交射影は $\vec{q} = \dfrac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{\|\vec{a}_1\|^2}\vec{a}_1 = \dfrac{1}{4}\vec{a}_1 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{a}_1$ 従って $\vec{p}_1$ に垂直な $\vec{a}_2 - \vec{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}4-1\\4+1\\-1\\4-1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\5\\-1\\3\end{pmatrix}$

$\vec{a}_2 - \vec{w} = \vec{a}_2 - \dfrac{1}{4}\vec{a}_1 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ でこれを正規化して（単位ベクトルにして）

$\vec{p}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{11}}\begin{pmatrix}3\\5\\-1\\3\end{pmatrix}$ となります．このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ は $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ の正規直交基底

となります* これを用いると $\vec{e}_2$ の V への直交射影 $\vec{w}_0$ は

$$\vec{w}_0 = (\vec{p}_1, \vec{e}_1)\vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{e}_1)\vec{p}_2$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{44}\cdot 5\begin{pmatrix}3\\5\\-1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix}-11+15\\11+25\\-11-5\\-11+15\end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix}4\\36\\-16\\4\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix}1\\9\\-4\\1\end{pmatrix}$$

一般に $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ はLDとなるからである．

---

*) $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$ で $L(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \subset L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ もし異ならば $\exists \vec{r} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$

$\vec{r} \notin L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ このとき $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{r}$ はLIとなる（示せるか？）これは有り得ない

ので $L(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$

VI　V に続けて書きます. V では $\vec{e}_2$ の $V_0 = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ を考えましたが,
ここでは $\vec{a}_3$ の V_0 への直交射影 $\vec{g}$ を考えます.

$$\vec{g} = (\vec{p}_1, \vec{a}_3)\,\vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{a}_3)\,\vec{p}_2 \quad \cdots\cdots \circledast$$

$$= \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2\sqrt{11}}\begin{pmatrix}3\\5\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{11}}\begin{pmatrix}3\\5\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{44}\cdot 7\begin{pmatrix}3\\5\\-1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix}11+21\\-11+35\\11-7\\11+21\end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix}32\\24\\4\\32\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix}8\\6\\1\\8\end{pmatrix}$$

となります. V_0 に垂直な $\vec{a}_3 - \vec{g} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{11}\begin{pmatrix}8\\6\\1\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}11-8\\0-6\\-11-1\\11-8\end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix}3\\-6\\-12\\3\end{pmatrix} = \frac{3}{11}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\\1\end{pmatrix}$$

を正規化した $\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\\1\end{pmatrix}$ は, $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ で $\circledast$ から
$\vec{g} \in L(\vec{a}_1, \vec{e}_2)$ なので $\vec{a}_3 - \vec{g} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ となりますから

$$\vec{p}_3 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ が LI で $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ から

$$L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

が従います.

補足　V1の $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ を用いて III の直交射影 $\vec{v}_0$ を求めると

$$\vec{v}_0 = (\vec{p}_1, \vec{e}_1)\vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{e}_1)\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{e}_1)\vec{p}_3$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{44}\cdot 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{22}\cdot 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 11 + 9 + 2 \\ -11 + 15 - 4 \\ 11 - 3 - 8 \\ 11 + 9 + 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と求まります.

VII　3次正方行列 $B \in M_3(\mathbb{R})$ に対して

$$B \text{ 正則} \iff \left(B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \right)$$

が成立するので

(i) $\left({}^tAA\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \right) \iff$ (ii) $\left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \right)$

$\Updownarrow$ ← 注

$$\left(v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + v_3\vec{a}_3 = \vec{0} \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = 0 \right)$$

を示します.

($\Rightarrow$)　$\underline{A\vec{v} = \vec{0}}$ とすると ${}^tAA\vec{v} = \vec{0}$. このとき (i) から $\underline{\vec{v} = \vec{0}}$

($\Leftarrow$)　${}^tAA\vec{v} = \vec{0}$ とします. このとき,

$$\| A\vec{v} \|^2 = (A\vec{v}, A\vec{v}) = ({}^tAA\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{0}, \vec{v}) = 0$$

から $A\vec{v} = \vec{0}$. (ii) から $\vec{v} = \vec{0}$.