

SLIN2025L05 07/03 小テスト問題

年 組	学生証番号		氏名	
-----	-------	--	----	--

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が張る $\mathbf{R}^4$ 中の部分空間 $V = L(\vec{a}, \vec{b})$ について考えます. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して $\vec{v} \in V$ の条件の下で $\|\vec{v} - \vec{e}_1\|^2$ の最小値を求めましょう. 最小値を取る $\vec{v}$ も求めましょう. ここでは V の正規直交基底を求めないで, 幾何的に求めましょう. (偏微分を使うことも論外とします.)

SLIN2025L05 07/03 小テスト解答

まず $(\vec{v}_0 - \vec{e}) \perp V$ を満たす $\vec{v}_0 \in V$ を求めます. そのために $\vec{v}_0 = x_0\vec{a} + y_0\vec{b}$ と表します. また任意の $\vec{v} \in V$ を $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ と表します. このとき

$$\begin{aligned} (\vec{v}_0 - \vec{e}) \perp V &\Leftrightarrow (i) \quad (x_0\vec{a} + y_0\vec{b} - \vec{e}, x\vec{a} + y\vec{b}) \quad (x, y \in \mathbf{R}) \\ &\Leftrightarrow (ii) \quad (x_0\vec{a} + y_0\vec{b} - \vec{e}, \vec{a}) = (x_0\vec{a} + y_0\vec{b} - \vec{e}, \vec{b}) = 0 \end{aligned}$$

が分かります. (i) $\Rightarrow$ (ii) は (ii) が $x = 1, y = 0$ と $x = 0, y = 1$ の場合なので明らかです. 他方 (ii) $\Rightarrow$ (i) は

$$(x_0\vec{a} + y_0\vec{b} - \vec{e}, x\vec{a} + y\vec{b}) = x(x_0\vec{a} + y_0\vec{b} - \vec{e}, \vec{a}) + y(x_0\vec{a} + y_0\vec{b} - \vec{e}, \vec{b})$$

から明らかです. ここで

$$\|\vec{a}\|^2 = 4, \quad (\vec{a}, \vec{b}) = -1, \quad \|\vec{b}\|^2 = 7, \quad (\vec{a}, \vec{e}) = 1, \quad (\vec{b}, \vec{e}) = 1$$

であることを用いると

$$(ii) \Leftrightarrow (4x_0 - y_0 - 1 = 0, \quad -x_0 + 7y_0 - 1 = 0) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{8}{27}, \quad y_0 = \frac{5}{27}$$

から

$$\vec{v}_0 = \frac{8}{27} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{27} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

であることが分かります. この状況で

$$\|\vec{v} - \vec{e}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{v}_0 + \vec{v}_0 - \vec{e}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{v}_0\|^2 + \|\vec{v}_0 - \vec{e}\|^2 \geq \|\vec{v}_0 - \vec{e}\|^2$$

が成立しますが $(\vec{v} - \vec{v}_0 \in V$ から $(\vec{v} - \vec{v}_0, \vec{v}_0 - \vec{e}) = 0$ に注意しましょう), 最後の不等式の等号成立条件は $\vec{v} = \vec{v}_0 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ となります. 従って $\|\vec{v} - \vec{e}\|^2$ は $\vec{v} = \vec{v}_0 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ のとき最小値

$$\|\vec{v}_0 - \vec{e}\|^2 = \left\| \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{368}{27^2}$$

をとります.

問題 12.1

11. テスト(105)の問12.1.1は、ある $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^4$ の存在を示す。 (本問の12.1.1は、 $\vec{v}_0 = \vec{e}$ のとき、出2(2)の問12.1.1は、 $\vec{v}_0 = \vec{e}$ のとき、17) となる。)

$$\vec{v}_0 = (\vec{a} \ \vec{e}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = (\vec{a} \ \vec{e}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$$\vec{v}_0 - \vec{e} \perp V \iff ((\vec{a} \ \vec{e}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \vec{e}, (\vec{a} \ \vec{e}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 0 \quad (\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2)$$

$$\iff ({}^t(\vec{a} \ \vec{e}) (\vec{a} \ \vec{e}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - {}^t(\vec{a} \ \vec{e}) \vec{e}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 0$$

$$\iff {}^t(\vec{a} \ \vec{e}) (\vec{a} \ \vec{e}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = {}^t(\vec{a} \ \vec{e}) \vec{e} \quad \dots (*) \quad (\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2)$$

$$\begin{aligned} {}^t(\vec{a} \ \vec{e}) (\vec{a} \ \vec{e}) &= \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{e} \end{pmatrix} (\vec{a} \ \vec{e}) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \vec{a} & {}^t\vec{a} \vec{e} \\ {}^t\vec{e} \vec{a} & {}^t\vec{e} \vec{e} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|\vec{a}\|^2 & (\vec{a}, \vec{e}) \\ (\vec{e}, \vec{a}) & \|\vec{e}\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$${}^t(\vec{a} \ \vec{e}) \vec{e} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{e} \end{pmatrix} \vec{e} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \vec{e} \\ {}^t\vec{e} \vec{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{a}, \vec{e}) \\ (\vec{e}, \vec{e}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

から

$$(*) \iff \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と示す。

ガウシアン消滅の直交化

$V = L(\vec{a}, \vec{e})$ の正規直交基底を求めよ

求めよ。

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

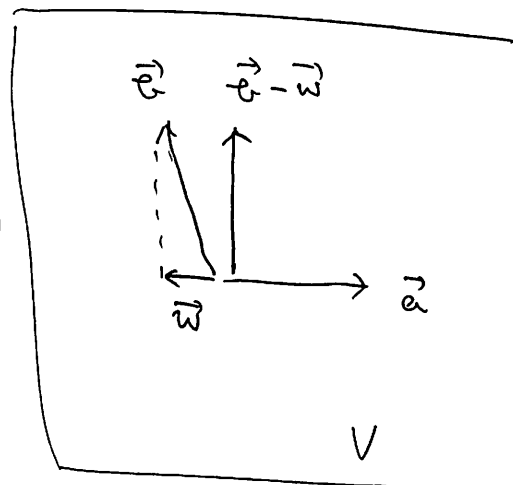
$$\vec{p}_2 \text{ の } \vec{a} \text{ への直交射影, } \vec{w} \text{ は } \vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \frac{-1}{4} \vec{a}$$

から $\vec{e}$ は垂直な V のベクトル

$$\vec{e} - \vec{w} = \vec{e} + \frac{1}{4} \vec{a}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4+1 \\ -8+1 \\ 4+1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$



$$25 + 49 + 9 + 25 = 108$$

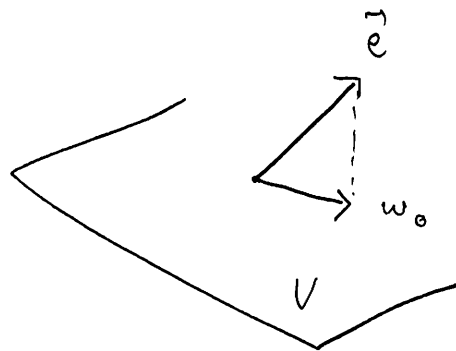
$\vec{e} - \vec{w}$ の単位ベクトルは

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{108}} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

とすると $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ は V の正規直交基底となす。($\vec{e} - \vec{w} \perp \vec{a}$ に注意)

$\vec{e}$ の V への直交射影, $\vec{w}_0$ は

($\vec{w}_0 - \vec{e} \perp V, \vec{w}_0 \in V$) 定義



$$\vec{w}_0 = (\vec{p}_1, \vec{e}) \cdot \vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{e}) \cdot \vec{p}_2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\sqrt{108}} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{108}} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{108} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 27 + 25 \\ 27 - 35 \\ -27 + 15 \\ 27 + 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 52 \\ -8 \\ -12 \\ 52 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} \text{ と求められる。 (この公式は正しいか?) }$$