

SLIN2025L04 06/26 小テスト問題

年 組	学生証番号		氏名	
-----	-------	--	----	--

単位ベクトル $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ について考えます.

(1) 単位ベクトル $\vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{R}^3$ で条件

$$(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad \det(\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) > 0$$

を満たすものを求めましょう.

(2) $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$ に対して 余因子行列を用いて P^{-1} を求めましょう.

補足問題（講義後に考えましょう） $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ を平面 $x + y + z = 0$ に関して折り返したベクトルを $\vec{w}$ とします。 $\vec{w} = Q\vec{v}$ を満たす $Q \in M_3(\mathbf{R})$ を求めましょう。 P を用いた座標変換で考えてみましょう。

SLIN2025L03 06/19 小テスト解答

(1) $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすれば

$$\|\vec{p}_2\| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

となります。さらに

$$\vec{p}_3 := \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right| \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

とします. $\|\vec{p}_3\| = 1$ は直接計算しても分かりますが $\vec{p}_1 \perp \vec{p}_2$ なので

$$\|\vec{p}_3\| = \|\vec{p}_1\| \cdot \|\vec{p}_2\| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

としても示せます. 外積の性質 (定義) から

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$$

が分かります. 最後に

$$|\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3| = (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \|\vec{p}_3\|^2 = 1 > 0$$

も分かります.

(2) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ に対して $|P| = 1$ なので P は正則で

$$A: \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$P = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

となります。

注意 $P^{-1} = P$ となりますが、これは P が直交行列であるという特殊なものだからです。

$|P|=1$, $P: \mathbb{D}_2^1 \hookrightarrow PP = I_3 \rightarrow \frac{1}{2} \otimes 15?$
 $3 = \sum (\mathbb{D})$ ~~and~~ $3 \bar{4}$. $\leftarrow A \otimes 25 \sim \dots$
 $SO(3)$

SLIN2025L03 06/19 小テスト補足問題解答

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ とします. $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ 座標で折り返しは $\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{aligned} Q &= P \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求められます.

補足問題の補足問題 直交射影を用いて Q を求めましょう.

解答 $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の $\vec{p}_1$ 方向への直交射影 $\vec{u}$ は

$$\vec{u} = (\vec{p}_1, \vec{v}) \vec{p}_1 = \vec{p}_1 \cdot {}^t \vec{p}_1 \vec{v}$$

となります. ここで

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v} - 2\vec{u} = \vec{v} - 2\vec{p}_1 {}^t \vec{p}_1 \vec{v} \\ &= (I_3 - 2\vec{p}_1 {}^t \vec{p}_1) \vec{v} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ 1 \ 1) \right) \vec{v} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{v} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} \end{aligned}$$

から $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ と求められます.

(別解) $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の部分空間

$$V = \{x + y + z = 0\}$$

への直交射影 $\vec{r}$ は

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\vec{p}_2, \vec{v}) \vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{v}) \vec{p}_3 = (\vec{p}_2 {}^t \vec{p}_2 + \vec{p}_3 {}^t \vec{p}_3) \vec{v} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ -1 \ 0) + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} (1 \ 1 \ -2) \right) \vec{v} \\ &= \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right) \vec{v} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} \end{aligned}$$

から $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ と求められます.

$$\vec{p}_1 {}^t \vec{p}_1 + \vec{p}_2 {}^t \vec{p}_2 + \vec{p}_3 {}^t \vec{p}_3 = I_3$$

SLIN2025L03 06/19 小テスト補足問題解答

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ とします. $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ 座標で折り返しは $\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi \\ -\eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ なので

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{aligned} Q &= P \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まります.

補足問題の補足問題 直交射影を用いて Q を求めましょう.

解答 $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の $\vec{p}_1$ 方向への直交射影 u は

$$\vec{u} = (\vec{p}_1, \vec{v})\vec{p}_1 = \vec{p}_1 \cdot {}^t\vec{p}_1 \vec{v}$$

となります. ここで

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v} - 2\vec{u} = \vec{v} - 2\vec{p}_1 {}^t\vec{p}_1 \vec{v} \\ &= (I_3 - 2\vec{p}_1 {}^t\vec{p}_1) \vec{v} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ 1 \ 1) \right) \vec{v} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{v} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} \end{aligned}$$

から $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ と求まります.

(別解) $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の部分空間

$$V = \{x + y + z = 0\}$$

への直交射影 $\vec{r}$ は

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\vec{p}_2, \vec{v})\vec{p}_2 + (\vec{p}_3, \vec{v})\vec{p}_3 = (\vec{p}_2 {}^t\vec{p}_2 + \vec{p}_3 {}^t\vec{p}_3) \vec{v} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ -1 \ 0) + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} (1 \ 1 \ -2) \right) \vec{v} \\ &= \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right) \vec{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} \end{aligned}$$

と求まります. 従って

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{v} + 2(\vec{r} - \vec{v}) = 2\vec{r} - \vec{v} \\ &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} \end{aligned}$$

から $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ と求まります.

注意 上の青色の式については L05 でかなり直観的な説明をしました, L06 できちんとした説明ができるはず.

SLIN2025L03 06/19 小テスト解答補足

L04 において簡単に説明しましたが $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

が成立します. ここで最右辺で 1×1 行列と実数を同一視していることに注意しましょう. このことを念頭に $X := (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$ に対して

$${}^t X X = \begin{pmatrix} {}^t \vec{a} \\ {}^t \vec{b} \\ {}^t \vec{c} \end{pmatrix} (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = \begin{pmatrix} {}^t \vec{a} \vec{a} & {}^t \vec{a} \vec{b} & {}^t \vec{a} \vec{c} \\ {}^t \vec{b} \vec{a} & {}^t \vec{b} \vec{b} & {}^t \vec{b} \vec{c} \\ {}^t \vec{c} \vec{a} & {}^t \vec{c} \vec{b} & {}^t \vec{c} \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{a}\|^2 & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & \|\vec{b}\|^2 & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{c}, \vec{a}) & (\vec{c}, \vec{b}) & \|\vec{c}\|^2 \end{pmatrix}$$

となりますが, ${}^t X X$ を X の**グラム行列**と呼びます.

L04 の小テストの (1) で求めた $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$ の列ベクトルは

$$(\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

を満たし, **正規直交系**と呼びます. この P のグラム行列は

$${}^t P P = I_3$$

となります. この両辺の行列式は

$$|{}^t P| \cdot |P| = |I_3| = 1$$

から $|P| \neq 0$, 従って P は正則であることが分かります. ${}^t P P = I_3$ の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$${}^t P = P^{-1}$$

であることが分かります. 一般に

$A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$|{}^t A| = |A|$$

が成立しますから, $|P|^2 = |I_3| = 1$ 従って $|P| = \pm 1$ となります. 他方, 解答の構成法では $\vec{p}_3 := \vec{p}_1 \times \vec{p}_2$ なので

$$|P| = |\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3| = (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2\|^2 \geq 0$$

から $|P| = 1$ であることが分かります.

ここでは行列式を用いて P が正則であることを用いましたが, L05 において

$$\begin{aligned} P \text{ が正則} & \stackrel{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \exists X \in M_3(\mathbf{K}) \ AX = XA = I_3 \\ & \Leftrightarrow \exists X \in M_3(\mathbf{K}) \ XA = I_3 \\ & \Leftrightarrow \exists X \in M_3(\mathbf{K}) \ AX = I_3 \end{aligned}$$

が成立することを示します. このことを用いても ${}^t P P = I_3$ がら P が正則であることが従います.

問題 (1) の条件は $\exists \vec{p} \in \mathbb{R}^3$ かつ $\vec{p} \perp \vec{p}_1$ である。 $(\mathbb{R}\vec{p}_1)$

$$V = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3; (\vec{v}, \vec{p}_1) = 0 \}$$

とすると $V = (\mathbb{R}\vec{p}_1)^\perp$ である。

したがって $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ は V の基底となる。

$$\vec{p}_2 \perp \vec{p}_3 \text{ であるから } \dim L(\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 2 \quad (1.7)$$

$$L(\vec{p}_2, \vec{p}_3) \subset V$$

$$\text{よって } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff x + y + z = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{よって}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ であり、また } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ からわかる。}$$

$$\text{よって } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } V \text{ の基底である。}$$

$$L(\vec{p}_2, \vec{p}_3) = V$$

よって $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ は V の基底である。 $\vec{p}_2 \neq \vec{p}_3$

$$\vec{r}_2 \text{ は } \|\vec{r}_2\| = 1 \text{ であり } \vec{r}_2 \in V \text{ である。}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \text{ であり、また } \vec{r}_3 \perp \vec{r}_1, \vec{r}_2 \text{ である。}$$

$\vec{r}_3 \perp \vec{r}_1, \vec{r}_2$ であるから $\vec{r}_3 \in V$ である。

$$(1.7) \quad \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_l \text{ は } \vec{p}_j \neq 0 \ (j=1, \dots, l), \quad (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \ (i \neq j)$$

(2)

$$\vec{r}_2 = x_1 \vec{r}_1 + y_1 \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = x_1 \vec{r}_3 - y_1 \vec{r}_2$$

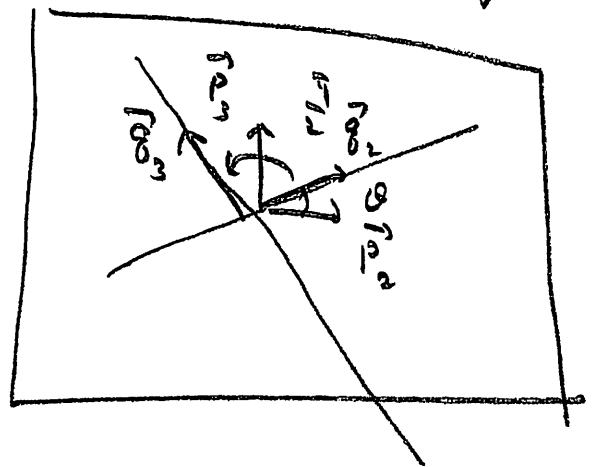
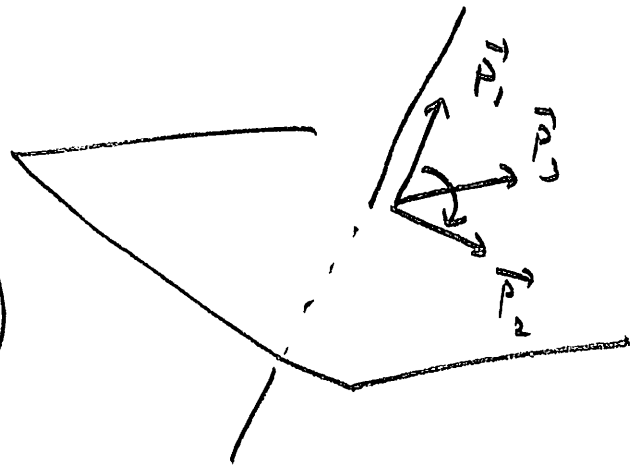
$$\text{Also } 1 = \|\vec{r}\|^2 = x_1^2 + y_1^2 \text{ and } x_1 = \cos \theta, y_1 = \sin \theta \text{ and } \vec{r}_1 \perp \vec{r}_3.$$

or

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$$

$$= (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

or (2) (2) (2)



直交行列

$$P \in M_3(\mathbb{R}) \text{ かつ } P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \text{ とするとき, } \quad (3)$$

$$PP^T = I_3 \Leftrightarrow (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3)$$

が成り立つ。(16) といふことは、 P は 直交行列 である。直交行列の全体を $O(3)$ と表わす。

$$(PP^T = I_3 \text{ かつ } |P|^2 = 1 \text{ より } |P| = \pm 1)$$

$$SO(3) = \{P \in O(3); |P| = 1\}$$

これは 回転行列 と呼ばれる。 $SO(3)$ の部分群は (A) で示される。

(16) $O(3)$ は直交行列、かつ $\vec{v}$ に対して $|\vec{v}| = 1$ ならば $|\vec{v}| = 1$ となる。

(17) $SO(3)$ は $\vec{v}$ に対して $|\vec{v}| = 1$ となる。