L04-0628 練習問題

I $A \in M_3(\mathbb{K})$ とします．A を行基本変形して出てくる全ての階段行列をすべて求めよ．また A_0 がその階段行列とするとき $\ker(A_0)$ の基底を求めよ．（すべての A_0 に対して）

II $A \in M_3(\mathbb{K})$ とします．$|A| = 0$ ならば $\exists \vec{v} \in \mathbb{K}^3$ が

$$A\vec{v} = \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0}$$

を満たすことを $A\tilde{A} = O_3$ から導け．

III
(1) $\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$ とします．

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$ に対して $|A|$ を求めましょう．

(2) $\underbrace{\text{クラメールの公式}}_{\text{(1)に続き}}$ を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

を解きましょう．$t^2x + ty + z$ がどうなるかを意識しましょう．

IV 余因子行列を用いて以下の A の逆行列を求めましょう．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

（LA24SL14 補）

V　$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して $\tilde{A}A = |A|I_3$ を考えます.

(2, 2)成分と(3, 1)成分に対して等式(クラメールの公式)が成立することを示しましょう.

VI　$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して $A\tilde{A} = |A|I_3$ を考えます.

(3, 3)成分と(2, 3)成分に対して等式(クラメールの公式)が成立することを示しましょう.