L04_0628 練習問題

I $A \in M_3(\mathbb{K})$ とします．A を行基本変形して出てくる狭義の階段行列をすべて求めよ．また A_0 がその階段行列とするとき $\ker(A_0)$ の基底を求めよ．（すべての A_0 に対して）

II $A \in M_3(\mathbb{K})$ とします．$|A| = 0$ ならば $\exists \vec{v} \in \mathbb{K}^3$ が

$$A\vec{v} = \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0}$$

を満たすことを $A\tilde{A} = O_3$ から導け．

III

(1) $\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$ とします．

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$ に対して $|A|$ を求めましょう．

(2) $\overbrace{\text{クラメールの}}^{\text{(1)に続き}}$公式を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

を解きましょう．$t^2x + ty + z$ がどうなるかを意識しましょう．

IV 余因子行列を用いて以下の A の逆行列を求めましょう．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

（LA24SL14 補）

V $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して $\tilde{A}A = |A| I_3$ を考えます.

(2, 2) 成分と (3, 1) 成分に対して等式(クラメールの公式)

が成立することを示しましょう.

VI $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して $A\tilde{A} = |A| I_3$ を考えます.

(3, 3) 成分と (2, 3) 成分に対して等式(クラメールの公式)

が成立することを示しましょう.

I $A \to \cdots \to A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I_3}{\shortparallel}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$

- $A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_0) \iff x = y = z = 0$

  から $\ker(A_0) = \{\vec{0}\}$ <u>基底はない</u> ← 注

- $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_1) \iff \begin{cases} x + \alpha z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

  から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\ker(A_1)$ の基底

- $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_2) \iff \begin{cases} x + \alpha y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

  から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\ker(A_2)$ の基底

- $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_3) \iff y = z = 0$

  から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\ker(A_3)$ の基底.

注 $\underset{}{\overset{A_0\text{のとき}}{\mathrm{Im}(A)}} = \mathbb{R}^3$, $\overset{A_1\text{のとき}}{\mathrm{Im}(A)} = L(\vec{a_1}, \vec{a_2})$, $\overset{A_2\text{のとき}}{\mathrm{Im}(A_2)} = L(\vec{a_1}, \vec{a_3})$,
$\overset{A_3\text{のとき}}{\mathrm{Im}(A_3)} = L(\vec{a_2}, \vec{a_3})$ ∵ A_1のとき $\vec{a_1} \nparallel \vec{a_2}$, A_2のとき $\vec{a_1} \nparallel \vec{a_3}$
A_3のとき $\vec{a_2} \nparallel \vec{a_3}$

・$A_4 = \begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \ker(A_4) \iff x+\alpha y+\beta z=0$

から $\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha y-\beta z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-\alpha\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-\beta\\0\\1\end{pmatrix}$

$c_1\begin{pmatrix}-\alpha\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\beta\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{0} \iff \begin{pmatrix}-\alpha c_1-\beta c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=\vec{0}$

$\iff c_1=c_2=0$

から $\begin{pmatrix}-\alpha\\1\\0\end{pmatrix}\nparallel\begin{pmatrix}-\beta\\0\\1\end{pmatrix}$ で $\ker(A_4)=L\left(\begin{pmatrix}-\alpha\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\beta\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ なので

$\begin{pmatrix}-\alpha\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\beta\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\ker(A_4)$ の基底

・$A_5 := \begin{pmatrix}0&1&\alpha\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(A_5)\iff y+\alpha z=0$

から $\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-\alpha z\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-\alpha\\1\end{pmatrix}$

から $\ker(A_5)=L\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-\alpha\\1\end{pmatrix}\right)$

$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-\alpha\\1\end{pmatrix}=\vec{0}\iff\begin{pmatrix}c_1\\-\alpha c_2\\c_2\end{pmatrix}=\vec{0}\iff c_1=c_2=0$

から $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\nparallel\begin{pmatrix}0\\-\alpha\\1\end{pmatrix}$ なので $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-\alpha\\1\end{pmatrix}$ は $\ker(A_5)$ の基底

・$A_6 := \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(A_6)\iff z=0$ なので

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ より $\ker(A_6)=L(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

$c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2=\vec{0}\iff\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\0\end{pmatrix}=\vec{0}\iff c_1=c_2=0$ から $\vec{e}_1\nparallel\vec{e}_2$

従って $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ は $\ker(A_6)$ の基底

・$A_7=O_3$ $\quad \forall\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^3$ に対して $O_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$ よって $\ker(A_7)=L(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 = \vec{0} \iff c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

となるので $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ は $\mathrm{Ker}(A_7)$ の基底

注　A_4のとき $\mathrm{Im}(A) = L(\vec{a}_1)$, $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, A_5のとき $\mathrm{Im}(A) = L(\vec{a}_2)$, $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$

A_6のとき $\mathrm{Im}(A_6) = L(\vec{a}_3)$, $\vec{a}_3 \neq \vec{0}$ が分かる。A_7のとき $\mathrm{Im}(A) = \{\vec{0}\}$

注　$\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = 3$ を確認しよう。

これを一般化したものが次元定理です。$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A_j)$

に注意しよう。

II $|A|=0$ のとき $A\tilde{A}=|A|I_3=O_3$ となる $\tilde{A}=(\vec{p}_1\,\vec{p}_2\,\vec{p}_3)$

とする. $\tilde{A}\neq O_3$ のとき $\vec{p}_1\neq\vec{0}$ OR $\vec{p}_2\neq\vec{0}$ OR $\vec{p}_3\neq\vec{0}$ から

ある $\vec{p}_j\neq\vec{0}$ に対して $A\vec{p}_j=\vec{0}$.

$\tilde{A}=O_3$ のとき $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=O_3 \text{ のとき.}$$

たとえば

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=0 \text{ から}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$ 従って $\lambda\neq 0$ OR $\mu\neq 0$ である

λ, μ に対して

$$\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}=\vec{0}$$

これは

$$A\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}=\vec{0},\quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

を意味する.

III (補間多項式)

(1)

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2-\alpha^2 & \beta-\alpha & 0 \\ \gamma^2-\alpha^2 & \gamma-\alpha & 0 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta+\alpha & 1 & 0 \\ \gamma+\alpha & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} \beta+\alpha & 1 \\ \gamma+\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma) = -(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

(2)

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b-a & \beta-\alpha & 0 \\ c-a & \gamma-\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\left\{(b-a)(\gamma-\alpha) - (c-a)(\beta-\alpha)\right\}$$

$$= \frac{1}{|A|}\left\{a(\beta-\gamma) + b(\gamma-\alpha) + c(\alpha-\beta)\right\}$$

$$= -\frac{a}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)} - \frac{b}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} - \frac{c}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

$$= \frac{a}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{b}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{c}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} \alpha^2 & a & 1 \\ \beta^2 & b & 1 \\ \gamma^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\left\{ -a \begin{vmatrix} \beta^2 & 1 \\ \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ \beta^2 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{|A|}\left\{ -a\,(\beta^2-\gamma^2) - b\,(\gamma^2-\alpha^2) - c\,(\alpha^2-\beta^2) \right\}$$

$$= -\frac{a(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \frac{b(\alpha+\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} - \frac{c(\alpha+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & a \\ \beta^2 & \beta & b \\ \gamma^2 & \gamma & c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\left\{ a \begin{vmatrix} \beta^2 & \beta \\ \gamma^2 & \gamma \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha \\ \gamma^2 & \gamma \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha \\ \beta^2 & \beta \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{|A|}\left\{ a\beta\gamma(\beta-\gamma) + b\gamma\alpha(\gamma-\alpha) + c\alpha\beta(\alpha-\beta) \right\}$$

$$= \frac{a\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{b\alpha\gamma}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{c\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$xt^2 + yt + z$$

$$= a\frac{(t-\beta)(t-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + b\frac{(t-\alpha)(t-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + c\frac{(t-\beta)(t-\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$f(t) = x^2t^2 + yt + z$ とすると

$$f(\alpha) = a,\ f(\beta) = b,\ f(\gamma) = c$$

が成立することが分ります. $\frac{(t-\beta)(t-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\ \Sigma$

Lagrangeの補間公式

と呼びます

IV (1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= -(-63 + 8) = 55 \neq 0$$

なので $|A|$は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 24 & 13 & 3 \\ 9 & -2 & 8 \\ -1 & -12 & -7 \end{pmatrix}$$

(2)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 19 \\ 0 & -13 & -21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ -13 & -21 \end{vmatrix}$$

$$= -63 + 247 = 184 \neq 0$$

なので Aは正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{184} \begin{pmatrix} 0 & -23 & 23 \\ 32 & -21 & -19 \\ 24 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

V

$$(\tilde{A}A)_{2,2} = \left(-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= -b_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{2列の展開}}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\tilde{A}A)_{3,1} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{3列の展開}}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

VI

$$(A\tilde{A})_{3,3} = (c_1\ c_2\ c_3) \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

3行の展開

$$(A\tilde{A})_{2,3} = (b_1\ b_2\ b_3) \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

3行の展開